Ю. М. КОЛЯГИН

# Задачи в обучении математике

I

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ШКОЛ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Ю. М. КОЛЯГИН

# ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

## ЧАСТЬ I

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ И РАЗВИТИЯ УЧАЩИХСЯ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1977

К $\frac{60501 — 463}{103(03) — 77}$ заказное

© Научно - исследовательский институт школ МП РСФСР (НИИ школ МП РСФСР), 1977 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . . 3
Введение . . . . . 4
О характерных особенностях математического мышления и проблеме его развития у школьников . . . 11
Общее понятие задачи. Математические задачи . . . 35
О классификации задач . . . . . 56
Особенности мыслительной деятельности в процессе решения задач . . . . . 75
Функции задач в системе воспитывающего и развивающего обучения математике . . . . . 94
Приложение . . . . . 110

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В период завершения перехода средней школы на новое содержание обучения весьма важной является проблема разработки приемов и методов обучения математике, обеспечивающих не только эффективное усвоение программного материала, но и математическое развитие школьников. Задачи и упражнения в процессе обучения математике играют первостепенную роль. Посредством решения соответствующих математических задач школьники не только активно приобретают математические знания, но и приобщаются к творческой работе уже на уровне школьного обучения. Поэтому вопросы теоретического обоснования методики использования задач в школьном обучении математике весьма актуальны.

На основе опыта работы автора, результатов экспериментальных исследований, обобщения передового опыта обучения математике в советской школе предпринята попытка наметить основные пути развития эффективной методики обучения математике через задачи. Наряду с этим показана необходимость и возможность использования математических задач для целенаправленного развития математического мышления школьников, органически связанного с процессом обучения и воспитания.

Книга предназначена для широкого круга специалистов в области обучения математике: от методистов и преподавателей методики педагогических институтов до творчески работающих учителей математики.

# ВВЕДЕНИЕ

В период развернутого строительства коммунистического общества задача формирования всесторонне развитой личности является одной из главных задач коммунистического воспитания людей. Построение коммунизма ведет «к воспитанию, обучению и подготовке всесторонне развитых и всесторонне подготовленных людей»[1].

Высокий уровень общего образования и всестороннего развития человека стал также одним из условий эффективного труда в условиях НТР, которая «...придает иной, чем прежде, характер труду, а стало быть, и подготовке человека к труду»[2].

Таким образом, требование гармонического развития и всесторонней подготовки советского человека стало объективным требованием развития общественного производства.

На любом участке народного хозяйства все в большей и большей степени от работника требуются не только фундаментальные общие и специальные знания, но и способность трудиться творчески, проявлять деловую инициативу, способность к непрерывному самообучению и самообразованию.

Именно эти качества человека обусловливают его способность успешно адаптироваться к многообразию и динамике современного производства.

«В современных условиях, — указывает Л. И. Брежнев, — когда объем необходимых для человека знаний резко и быстро возрастает, уже невозможно делать главную ставку на усвоение определенной суммы фактов. Важно прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной и политической информации»[3].

Поэтому целенаправленную подготовку молодежи к деятельности творческого характера следует начинать уже в процессе школьного обучения. Обучение математике представляет весьма широкие возможности для решения этой важной задачи.

Новые программы по математике для средней школы явились значительным шагом вперед в направлении сближения школьного курса математики с математической наукой с учетом устойчивой тенденции к математизации различных научных дисциплин, к

---

[1] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 41, с. 33.
[2] Материалы XXV съезда КПСС. М., с. 77.
[3] Материалы XXV съезда КПСС. М., с. 77.

широкому применению математических методов в различных отраслях техники и народного хозяйства.

Опосредованный, а значит, универсальный характер применения математики объясняет столь бурную ее экспансию во все сферы человеческой деятельности, и потому глубокое и прочное усвоение школьниками нового содержания обучения математике уже явится существенным вкладом в математическую культуру молодежи — будущих строителей коммунистического общества. Вместе с тем воспитание высокой математической культуры у выпускника современной школы предполагает существенную активизацию самостоятельной учебной работы школьников, в результате которой у них могут быть сформированы умения изучать математику самостоятельно и творчески, а следовательно, созданы предпосылки к активному применению математических знаний в дальнейшем.

В процессе активизации самостоятельной познавательной деятельности школьников по изучению курса математики станет возможным значительно повысить и уровень их математического развития, сформировать у учащихся качества научного мышления (в частности, математического мышления), усилить роль обучения математике в формировании у школьников коммунистического мировоззрения.

Важнейшим средством формирования у школьников высокой математической культуры, активизации обучения математике является эффективная организация и управление учебной деятельностью школьников в процессе решения различных математических задач. Именно при решении математических задач школьники сознательно и прочно овладевают системой математических знаний, умений и навыков. Более того, в процессе решения математических задач у школьников самым естественным образом могут быть сформированы качества, присущие творческой личности, качества, необходимые им для активного участия в создании материальных и духовных ценностей в будущем, независимо от того, какую профессию они изберут.

Действительно, не будет большим преувеличением утверждение о том, что каждодневная деятельность человека (и общества) состоит из решения различных задач во всем многообразии их содержания, форм постановки и применяемых методов решения. В виде процесса решения задач может быть описана деятельность социальных, экономических и биологических систем, автоматических и автоматизированных систем, производственная, культурная и бытовая деятельность человека.

Если говорить о математике, то решение задач является важнейшим видом деятельности, называемой математической; кроме того, сама математика часто используется в качестве наиболее удобного языка для описания многих задач и методов их решения.

Большинство задач решается в процессе целенаправленной и планомерной деятельности; некоторые из задач возникают случайно и требуют решения в незапланированном порядке. Для решения

многих важных задач не существует алгоритмического способа их решения; успех в решении таких задач зависит часто от того, насколько подготовлен человек к деятельности творческого характера: владеет ли он определенной системой эвристик, умеет ли он мыслить и действовать самостоятельно, нешаблонно, развита ли у него способность к актуализации знаний и опыта, способность к рационализации, оптимальному, в данных условиях, выбору, к критическому осмысливанию получаемых результатов и т. д.

Учебные задачи при правильной их постановке в школьном обучении являются важным (если не единственным) средством подготовки учащихся к такого рода деятельности.

Научно-техническая революция, которая во многом обусловила существенное насыщение школьного курса математики новым содержанием, тем самым привела и к тому, что постановка задач в школьном обучении математике приобрела еще большую значимость. В самом деле, объем учебной математической информации школьного курса математики существенно возрос, тогда как время, отводимое на ее усвоение, практически не изменилось. Это, в частности, привело к тому, что отдельные теоретические положения курса математики стали сообщаться школьникам через задачи. Таким образом, произошло значительное расширение роли задач в обучении математике: задачи приобрели дополнительную функцию — функцию носителя учебной информации; пренебречь решением той или иной задачи в ходе обучения математике стало опасным вдвойне.

Требования НТР к уровням общеобразовательной подготовки и развития участника любой отрасли современного производства, подкрепленные результатами исследований психологов о необходимости органического сочетания обучения и развития, также привели к повышению роли задач в обучении математике; известно, что формирование математического развития школьников в основном осуществляется в процессе решения ими различных задач. Ясно также, что решение задач является эффективным средством воспитания и профессиональной ориентации школьников.

Итак, от решения проблемы эффективной постановки задач в обучении математике во многом зависит не только качество обучения, воспитания и развития учащихся средней школы, но и степень их подготовленности к последующей деятельности в любой сфере производства, народного хозяйства, культуры, личных и общественных взаимоотношений.

Поэтому правомерно утверждать, что педагогические основы использования задач в школьном обучении математике могут и должны быть предметом серьезных исследований в области методики математики (равно как и методики других учебных предметов естественно-математического цикла).

Советской школой накоплен богатый опыт в совершенствовании методики обучения учащихся решению математических задач в обучении математике через задачи. Широко известны, например,

работы И. К. Андронова, И. В. Арнольда, И. И. Александрова, В. М. Брадиса, В. В. Репьева, Ф. Ф. Притуло, Е. Ф. Даниловой, А. С. Пчелко, Л. Н. Скаткина, Я. Ф. Чекмарева и других, которые были посвящены разработке методики обучения школьников решению задач определенных типов, составляющих в то время даже определенную часть содержания школьного курса математики.

За последнее десятилетие внимание к проблеме постановки задач в школьном обучении математике резко возросло. Существенный вклад в решение многих конкретно-методических вопросов, связанных с этой проблемой, внесли работы советских методистов-математиков: Г. Д. Балка, Г. П. Бевза, Н. Я. Виленкина, Л. М. Лоповка, Ю. Н. Макарычева, В. М. Монахова, К. И. Нешкова, Ф. Ф. Нагибина, А. М. Пышкало, Н. К. Рузина, А. Д. Семушина, З. А. Скопеца, А. А. Столяра, И. Ф. Тесленко, В. В. Фирсова, Р. С. Черкасова, П. М. Эрдниева, и зарубежных: Я. Вишина, И. Ганчева, С. Крыговской, Д. Пойа, У. У. Сойера и других.

На основе анализа работ упомянутых авторов можно сделать общий вывод о том, что решение задач является важным средством формирования у школьников системы ведущих математических знаний и способов деятельности, основной формой учебной работы учащихся в процессе изучения математики, одним из эффективных средств их математического развития.

В последнее время особое внимание специалистов, занимающихся вопросами школьного математического образования, было направлено на модернизацию содержания обучения математике.

Первый этап внедрения новой программы по математике в практику работы массовой школы можно считать в целом завершенным. Однако предстоит еще весьма серьезная работа по совершенствованию нового содержания обучения математике как в направлении отбора системы ведущих математических знаний школьного курса, так и в направлении существенного улучшения методики изложения учебного материала в действующих учебниках и учебных пособиях.

Наиболее серьезные изменения предстоит внести в содержание и систему задач школьного курса математики. Та система задач, которая представлена в ныне действующих учебниках и учебных пособиях, еще по весьма большому числу параметров не отвечает целям обучения, воспитания и развития, заложенным в новых программах по математике, не использует в полной мере те возможности, которые могут быть реализованы в процессе их решения школьниками. Изменение содержания обучения математике повлекло за собой в основном лишь внешнее изменение содержания учебных задач, их внутренняя структура, технология их постановки в обучении, практически реализуемые ими функции остались инвариантными относительно проведенной реформы. По-прежнему набор математических задач ко многим темам курса в школьных учебниках нередко носит случайный характер, некоторые задачи

школьного курса математики либо слишком тривиальны, либо излишне сложны; в ряде тем курса не удалось найти в содержании и методике решения задач адекватного отражения реализуемым в них ведущим идеям и т. д.

Как и ранее, в практике современного обучения математике на решение задач отводится большая часть учебного времени как на уроках, так и при выполнении школьниками домашних заданий. Неэффективность использования этого учебного времени отрицательно сказывается на качестве обучения математике в целом.

Если также учесть, что задачи и их решение находят широкое применение в конкретных методах обучения математике, то станет ясным тот факт, насколько существенно зависит качество усвоения школьниками нового содержания обучения от эффективности постановки задач в школьном обучении математике.

Проведенные автором теоретические и экспериментальные исследования, результаты изучения сектором обучения математике НИИ школ МП РСФСР состояния математических знаний учащихся средней школы и качества преподавания математики, анализ результатов приемных экзаменов по математике в вузы показали, что проблема постановки задач в школьном обучении математике до сих пор не имеет удовлетворительного решения ни в содержательном, ни в методическом плане.

Так, для практики обучения математике в массовой школе до сих пор характерно:

*стандартизация содержания и методов решения задач*, проявляющаяся в узком понимании учителями роли и дидактического назначения математической задачи; в стремлении решить со школьниками возможно большее число задач в ущерб их обучающему качеству; в излишнем внимании учителей к оформлению решения задач, а не к процессу их решения; в наличии большого числа задач, направленных на формирование таких умений и навыков, которые в современной практической деятельности почти не применяются; в традиционном характере форм постановки задач, формулировок их условий, структур процесса решения и т. д.;

*несовершенство методики обучения решению задач и методики обучения математике через задачи*, проявляющееся в обучении школьников решению задач преимущественно по образцу, в отсутствии целенаправленной работы учителя по формированию у школьников умения критически оценить ход решения задачи и проверить полученный результат; в канонизации приемов коллективного решения поставленной задачи; в использовании задач преимущественно для закрепления готовых знаний или их повторения; в чисто проверочном характере контрольных и самостоятельных работ; в отсутствии четких критериев дидактической значимости каждой задачи школьного курса математики, с помощью которых можно было бы установить хотя бы приближенно необходимое число задач какого-либо типа для достижения реализуемой через них цели обучения и т. д.;

*несоответствие постановки задач и их решений закономерностям развивающегося математического мышления*, проявляющееся в отсутствии в школьном курсе математики задач, решение которых подготовило бы школьников к деятельности, характерной для современного производства (рационализация и контроль, управление, изобретательство и т. п.), т. е. к деятельности творческого характера; в недостатке в школьном курсе математики задач, формирующих у школьников важнейшие мыслительные умения (обобщать, анализировать, моделировать, осуществлять мысленный эксперимент и т. п.); в использовании задач только для контроля фактических знаний, а не уровня их математического развития; в однообразии типологии задач школьного курса математики и т. д.

Итак до настоящего времени четко не определены: функции задач в обучении математике; система задач, их реализующая; типы задач, реализующих идею развивающего и воспитывающего обучения математике; ориентировочный количественный и качественный минимум задач, необходимых для реализации через них той или иной конкретной цели обучения математике. Недостаточно разработана методика обучения школьников решению математических задач, в частности не выделены основные мыслительные умения, которые могут и должны быть сформированы у учащихся в процессе решения задач; не выделены общие приемы и методы решения задач, ознакомление школьников с которыми возможно и полезно; не разработана должным образом методика обучения школьников применению к решению задач математических методов (метода уравнений, векторного и координатного методов, метода геометрических преобразований). Не определена целостная система задач, контролирующих степень обученности, обучаемости и математического развития школьников на каждом этапе обучения математике. Недостаточно разработана методика обучения математике через задачи и т. д. И прежде всего не выявлены педагогические основы теории обучения решению математических задач и обучения математике через задачи.

Такое положение дел характерно не только для нашей школы, но и для зарубежной. Это свидетельствует о том, что до сих пор все усилия методистов-математиков не были сосредоточены в направлении коренного решения этой проблемы. Вопросы коренного пересмотра всей системы задач школьного курса математики с учетом дидактической и практической значимости обучения решению задач для реализации основных целей школьного математического образования по существу еще серьезно не ставились.

Таким образом, проблема поиска эффективной системы обучения математике и математического развития школьников через решение задач весьма актуальна.

Заметим, что в настоящее время возможность существенного усовершенствования системы задач и методики их использования в обучении значительно расширилась благодаря результатам специальных исследований, проведенных за последнее десятилетие со-

ветскими и зарубежными психологами и дидактами: Г. А. Баллом, П. Я. Гальпериным, В. В. Давыдовым, В. А. Крутецким, З. И. Калмыковой, А. Н. Леонтьевым, А. М. Матюшкиным, Н. А. Менчинской, Я. А. Пономаревым, О. К. Тихомировым, Л. М. Фридманом, Ю. К. Бабанским, И. Я. Лернером, М. И. Махмутовым, М. Н. Скаткиным, Дж. Брунером, З. Дьенешем и др., а также в связи с результатами исследований советских и зарубежных специалистов, занимающихся проблемой «искусственного разума» Н. М. Амосова, А. А. Братко, В. М. Глушкова, А. А. Фельдбаума, М. Л. Минского, У. Р. Рейтмана, У. Р. Эшби и др.

В психологическом плане наше исследование опиралось на результаты исследований многих из упомянутых ученых. Автор считает необходимым особо отметить работы известных советских математиков-методистов А. Н. Колмогорова, А. И. Маркушевича и С. И. Шварцбурда, под влиянием которых возникли и утвердились многие идеи данного исследования.

# О ХАРАКТЕРНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ И ПРОБЛЕМЕ ЕГО РАЗВИТИЯ У ШКОЛЬНИКОВ

Среди многих проблем перестройки преподавания математики в средней школе все большее внимание привлекает проблема воспитания у учащихся математического мышления. Новизна в методах обучения проявляется прежде всего в том, что основной акцент делается не на запоминание учебной информации, а на ее глубокое понимание, на формирование у школьников умений творчески применять эту информацию на практике. Но понять, как указывал В. И. Ленин, — значит уметь выразить мысль в форме понятий[1], а «образование (абстрактных) понятий и операции с ними *уже* включают в себе представление, убеждение, с о з н а н и е закономерности объективной связи мира»[2].

Поэтому развитие общей культуры мышления и, в частности, математического мышления — одна из актуальных задач современного обучения и воспитания.

Известно, что последние десятилетия характерны широкой математизацией различных отраслей науки и техники, которые ранее представлялись весьма далекими от математики. В связи с этим возросли требования к математической культуре современного человека.

Широкое внедрение ЭВМ во все сферы производства, использование во многих отраслях народного хозяйства систем автоматизации и управления приводит к тому, что «современная техника и организация производства более чем когда-либо требуют дисциплины мышления и логической полноты суждений»[3].

Таким образом, актуальность проблемы развития мышления обусловлена не только потребностями образования, но и потребностями науки и производства.

Последний тезис получил широкое признание во всем мире. Так, на XIX Международной конференции по преподаванию математики, организованной ЮНЕСКО, отмечалось, что «математика и свойственный ей стиль мышления должны рассматриваться как существенный элемент общей культуры современного человека,

---

[1] Л е н и н В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 231.
[2] Там же, с. 160.
[3] Г н е д е н к о Б. В. В. И. Ленин и методологические проблемы математики. М., 1970, с. 6.

даже если он не занимается деятельностью в области точных наук или техники...»[1].

Понятно, что проблема целенаправленного развития мышления школьников стала одной из важных в современной дидактике.

«...Подлинное решение проблем современного школьного образования со стороны его логико-психологических основ предполагает изменение типа мышления, проектируемого содержанием учебных предметов и методами их преподавания. Совершенствование последних должно осуществляться в плане этой главной перспективы...»[2].

Специфика математики такова, что изучение этого учебного предмета достаточно сильно влияет на развитие мышления школьников. В самом деле, развитие мышления школьников тесно связано с формированием приемов мышления в процессе их учебной деятельности. Эти приемы мышления (анализ, синтез, обобщение, абстрагирование и т. д.) выступают так же, как специфические методы научного исследования, особенно ярко проявляющиеся при обучении математике и, в частности, при решении задач.

«Решение задач — вовсе не привилегия математики. Все человеческое познание есть не что иное, как непрекращающийся процесс постановки и разрешения все новых и новых задач, вопросов, проблем. И лишь тогда человек усвоит научные формулы и положения, когда увидит в них не просто фразы, которые надлежит запомнить, а прежде всего с трудом найденные ответы на живые вопросы, на вопросы, естественно вырастающие из жизни. Ясно, что человек, увидевший в теоретической формуле ясный ответ на заинтересовавший его вопрос, проблему, трудность, эту теоретическую формулу не забудет. Ему не нужно будет ее зазубривать, он ее запомнит легко и естественно. А и забудет — не беда, всегда выведет снова, когда ему встретится ситуация — задача с тем же составом условий. Это и есть ум»[3].

Поэтому, в отличие от традиционного обучения, современное обучение характеризуется стремлением сделать развитие мышления школьников управляемым процессом, а основные приемы мышления — специальным предметом усвоения.

В процессе эволюции науки математики и методики математики естественно изменилось то содержание, которое вкладывалось в понятие «математическое мышление», существенно возросла роль проблемы развития мышления в процессе обучения математики.

Известно, что между системой обучения и ходом умственного развития учащихся существует тесная взаимосвязь, подчиняющаяся определенным закономерностям, поиски которых являются в

---

[1] Маркушевич А. И. На XIX Международной конференции по народному просвещению. «Математическое просвещение», 1957, № 1, с. 16.

[2] Давыдов В. В. Виды обобщения в обучении. М., 1972, с. 5.

[3] Ильенков Э. В. Школа должна учить мыслить. — Приложение к журналу «Народное образование», 1964, № 1, с. 5.

настоящее время одной из центральных проблем педагогической психологии.

Говоря о связи обучения и развития, известный советский кибернетик А. А. Фельдбаум, как и все советские психологи, отмечал, что задачи обучения и развития нельзя отрывать друг от друга. Вместе с тем он пишет: «Накопление знаний играет в процессе обучения немалую, но отнюдь не решающую роль. Человек может забыть многие конкретные факты, на базе которых совершенствовались его качества. Но если они достигли высокого уровня, то человек справится со сложнейшими задачами, а это и означает, что он достиг высокого уровня культуры (мышления. — *Ю. К.*)»[1].

В какой-то степени афоризм одного из известных физиков М. Лауэ: «Образование есть то, что остается, когда все выученное уже забыто»[2], характеризует как важную роль развития мышления, так и его неразрывную связь с обучением.

Практика школьного обучения настойчиво требует от учителя проводить конкретную работу по развитию у учащихся математического мышления уже сейчас.

Однако на вопросы, какое мышление называют математическим, каковы его основные черты, четкого и однозначного ответа до сих пор нет ни в методике обучения математики, ни в психологии мышления.

К сожалению, в настоящее время в психологии мышления не выявилось единого подхода к трактовке мышления, объяснению тех «механизмов», которые им управляют[3]. Естественно, что и в педагогической психологии отсутствует общепринятая концепция, на основе которой обучение и развитие школьников могло быть организовано заведомо эффективно.

Оставив в стороне специальный критический анализ существующих концепций мышления (как не относящийся непосредственно к теме нашего исследования), выскажем все же некоторые общие соображения, которых мы будем придерживаться в дальнейшем.

В современной психологии мышление понимается как «социально-обусловленный, неразрывно связанный с речью психологический процесс поисков и открытия существенно нового, т. е. процесс опосредствованного и обобщенного отражения действительности в ходе ее анализа и синтеза. Мышление возникает на основе практической деятельности их чувственного познания и далеко выходит за его пределы»[4].

---

[1] Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. Под ред. Я. З. Цыпкина. Сб. статей. М., 1972, с. 113.

[2] Лауэ М. Мой творческий путь в физике. — В кн : История физики. М., 1958, с. 17.

[3] См.: Тихомиров О. К. Структура мыслительной деятельности человека. М., 1969, с. 56, 273.

[4] Общая психология. Учебное пособие для педагогических институтов. Под ред. проф. А. В. Петровского. М., 1970, с. 290.

В сравнении со всеми другими проявлениями человеческой психики мышление является наиболее скрытым, труднодоступным для изучения.

Для зарубежных психологов идеалистического толка это обстоятельство послужило основанием к тому, чтобы объявить мышление внутренней способностью человека, не связанной ни с внешним миром, ни с мозгом человека, ни с социальными условиями его жизни.

В исследовании мышления советские психологи руководствуются так называемым принципом детерминизма. В самом общем виде он определяется следующим образом: внешние причины действуют через внутренние условия. С. Л. Рубинштейн говорит, что, только опираясь на этот принцип, можно определить закономерности психологических явлений и что именно этот принцип является ядром психологической теории[1].

На основе принципа детерминизма советскими психологами дается диалектико-материалистическое понимание мышления, согласно которому мышление есть «непрерывное взаимодействие мыслящего субъекта с познаваемым объектом. В ходе их взаимодействия субъект обнаруживает в объекте все новые и новые свойства, которые также включаются в детерминацию практической и познавательной деятельности»[2].

Известно, что всякая познавательная деятельность начинается с ощущений и восприятий, переходя затем в мышление (сначала на уровне представлений, а затем на уровне понятий). В процессе мышления человек начинает познавать окружающий мир опосредованно, устанавливая также свойства изучаемого объекта, которые непосредственно не воспринимаются им, не ощущаются и не наблюдаются. Тем самым расширяется круг познания человеком различных явлений реальной действительности, что в свою очередь ведет к расширению его восприятий и представлений. А. В. Брушлинский правильно отмечает, что «в реальной познавательной деятельности каждого человека чувственное познание и мышление непрерывно переходят одно в другое и взаимообусловливают друг друга»[3]. В частности, неразрывная связь познания и мышления ярко обнаруживается при решении геометрических задач, в которых чертеж обеспечивает взаимную коррекцию абстрактного мышления и зрительного восприятия. Такая же неразрывная связь обнаруживается между мышлением и языком (речью и записью с помощью обычного текста или символики).

Таким образом, внутренние условия мышления выступают не как замкнутые, а как специфические его условия, тесно связанные с оказываемым на них внешним воздействием.

---

[1] См.: Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. М., 1958, с. 135.

[2] Брушлинский А. В. Психология мышления и кибернетика. М., 1970, с. 37.

[3] Там же, с. 39.

Внутренние условия мышления определяются уровнем активности и степенью взаимодействия в процессе познания таких мыслительных операций, как анализ, синтез и обобщение. В качестве внешних условий мышления выступают прежде всего сам объект мышления, а также среда, в которой взаимодействуют субъект и объект.

В психологии правомерно отмечается неразрывная связь мышления с потребностями, мотивами и эмоциями, указывающая на целенаправленность этого процесса. Приняв эти общие положения за основу, мы попытаемся дать определенную характеристику мышления, называемого математическим. При этом, оговоримся сразу, мы не будем ставить себе целью характеризовать математическое мышление с «внутренней», чисто психологической стороны, наша цель — выявить определенные, проявляющиеся в учебной деятельности черты математического мышления, априори признать, что развитие их у школьников в процессе обучения математике повысит эффективность математического развития учащихся в целом, наметить некоторые дидактические пути реализации такого развития в обучении. И в следующем: «математическое мышление» используется нами как удобный рабочий термин. Под *математическим* мышлением в целом мы будем понимать прежде всего форму, в которой проявляется диалектическое мышление в процессе познания конкретной науки — математики (или ее приложений).

Понятно, что математическое мышление полностью отвечает той характеристике, которая присуща мышлению вообще. Вместе с тем «учить специфически человеческому мышлению — значит учить диалектике»[1]. Последнее характеризуется осознанием изменчивости, двойственности, противоречивости, единства, взаимосвязи и взаимозависимости понятий и соотношений. Мыслить диалектически, кроме того, означает проявлять способность к нешаблонному, разностороннему подходу при изучении объектов и явлений, при решении возникающих при этом проблем.

Для диалектического мышления характерны также понимание различий между умозаключениями достоверными и вероятными (правдоподобными) и осознание единства и противоположности в проявлении конечного и бесконечного.

Диалектическое мышление Гегель мыслил как мышление «разумное»[2]. Развивая эту мысль Гегеля, Ф. Энгельс отмечал, что «диалектическое мышление ... имеет своей предпосылкой исследование природы самих понятий»[3], тем самым теоретическое мышление (или мышление абстрактное) является одной из разновидностей мышления диалектического. Ту же самую мысль можно найти и у В. И. Ленина, отмечавшего, что «...*все* научные (правильные, серь-

---

[1] Ильенков Э. В. Дидактика и диалектика. — «Вопросы философии», 1974, № 2, с. 79.

[2] См.: Гегель. Соч., т. 1, М., 1929, с. 66.

[3] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 537—538.

езные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, п о л н е е»[1], т. е. что именно теоретическое мышление наиболее эффективно обеспечивает достижение этой цели познания.

Таким образом, полноценное математическое мышление неизбежно должно быть одновременно и диалектическим мышлением.

Именно последним оправдывается разговор о диалектическом мышлении там, где заходит речь о мышлении, называемом математическим. Математическое мышление имеет свои черты и особенности, которые обусловлены спецификой изучаемых при этом объектов, а также спецификой методов их изучения.

Прежде всего математическому мышлению свойственны те качества, которые присущи научному мышлению. Опыт школьного обучения математике свидетельствует о том, что уровень сформированности этих качеств у школьников оказывает существенное влияние на эффективность их обучения и развития.

Остановимся на рассмотрении этого вопроса детально.

Известно, что познание регулируется по двум каналам отображения реальной действительности: по узко направленному каналу отображения основного объекта познания и по достаточно широкому каналу отображения фона этого объекта (свойств и соотношений других объектов, связанных с данным). И если первый канал отображения регулируется сознанием, то второй функционирует неосознанно.

Знания и опыт человека откладываются в памяти не изолированно друг от друга, а в виде некоторых комплексов мыслей или представлений, в виде «готовых путей мысли», в виде «готовых способов рассуждений»[2]. В процессе воспроизведения их в памяти человек обычно вспоминает не только требуемый объект, но и его фон, составляющий с этим объектом определенный комплекс. Процесс отделения фона от объекта весьма сложен и требует высокой культуры мышления. Понятно, что школьники, не обладающие высокой культурой математического мышления, вспоминают обычно вместе с существенными свойствами объекта и многие его несущественные свойства, часто не умея отделить одно от другого.

Нередко фон объекта образует мешающие ассоциации, в силу чего некоторые бесполезные в данной ситуации положения, запоминающиеся в комплексе с необходимыми, восстанавливаются в памяти вместе с ними и затушевывают их. Кроме того, знания и опыт весьма часто воспроизводятся сознанием по определенным, привычным для данного индивидуума проторенным путям, выражающимся в следовании определенной системе правил, в применении одного и того же метода решения задачи. Таким образом, нередко проявляется стандартизация мышления. Стандартизация мышления и его нерасчлененность особенно характерны для школь-

---

[1] Л е н и н В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152.

[2] См.: П у ш к и н В. Н. Психология и кибернетика. М., 1971, с. 41—42.

ников. Следует отметить, что эти качества мышления, присущие многим школьникам, имеют как негативный, так и позитивный характер.

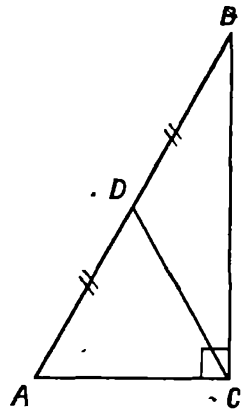


Рис. 1

Тот факт, что эта особенность мышления избавляет школьника от необходимости заново усваивать те или иные операции, решать задачи тех типов, которые неоднократно им встречаются, безусловно положительно сказывается на результатах обучения. Однако эти же качества мышления мешают школьникам мыслить оригинально, отделять главное от второстепенного, отыскивать новые пути решения задач, применять известные им знания в новой ситуации. Понятно, что все это не способствует развитию творческих потенций школьника. Поэтому в обучении математике весьма важно помогать школьникам преодолевать этот психологический барьер, развивать у них качества, присущие *научному стилю мышления*.

Охарактеризуем некоторые из этих качеств и проиллюстрируем их конкретными примерами из практики школьного обучения.

*Гибкость мышления* характеризуется: 1) способностью к целесообразному варьированию способов действия; 2) легкостью перестройки системы знаний, умений и навыков при изменении условий действия; 3) легкостью перехода от одного способа действия к другому, умением выходить за границы привычного способа действия.

Таким образом, гибкость мышления обнаруживается в быстроте ориентировки в новых условиях, в умении видеть новое в известном, выделять существенное, находящееся в скрытой форме. Интересно отметить, что Ж. Адамар, А. Эйнштейн и др. указывают на гибкость мышления как на характерную черту творчества[1].

В качестве примера проявления гибкости мышления может служить успешное решение школьниками таких, например, задач:

а) Два человека подошли одновременно к реке. У пустого берега стояла лодка (лишь для одного человека). Тем не менее оба сумели переправиться через реку в этой лодке. Каким образом?

Противоречие, вызванное самой постановкой задачи, «затеняет» возможный тривиальный случай, когда путники подошли к реке с двух противоположных берегов.

б) Найти сторону $AC$ треугольника $ABC$ (рис. 1), если периметр $ABC$ равен 39, а периметр $BDC$ равен 24 (решение: $39 - 24 = 15$).

Качество мышления, которое является антиподом данному качеству, есть косность мышления (или психологическая инерция).

[1] См.: Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970.



ГОС. НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА

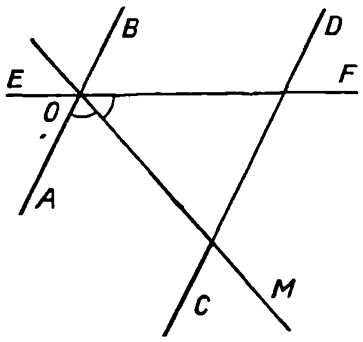



Рис. 2

Под психологической инерцией понимается предрасположение к какому-либо конкретному методу или образу мышления при решении задач. Дж. Диксон считает ее весьма серьезной помехой изобретательству (и творческому мышлению вообще), правильно отмечая, что «психологическая инерция — это следствие обучения»[1]. Именно на преодоление этого качества мышления направлены известные эвристики типа: «Забудь о том, что знаешь», «Помни, что методов много, а не один», «Не иди по проторенному пути» и т. п.

Психологическая инерция проявляется и в особой приверженности к тому методу решения задачи (пути решения задачи), который приходит в голову первым.

С психологической инерцией связан и эффект, называемый функциональной устойчивостью, согласно которой в большинстве случаев объекты, используемые в данной ситуации в обычных для них функциях, не используются в новом качестве[2]. Этим, в частности, объясняются те трудности, которые связаны с переосмысливанием школьниками условия задачи, являющимся необходимой предпосылкой ее успешного решения. Вот один из характерных примеров.

Параллельные прямые $AB$ и $CD$ пересечены прямой $EF$. Величина одного из внутренних углов при точке $O$ (рис. 2) равна 130°, $[OM]$ — биссектриса этого угла. Определить величину угла, образованного ею с прямой $CD$.

Здесь прямая $OM$ выступает одновременно и как биссектриса и как секущая. Ее роль как биссектрисы угла создает функциональную устойчивость, в силу которой учащиеся часто затрудняются в использовании этой прямой в качестве секущей.

*Активность мышления* характеризуется постоянством усилий, направленных на решение некоторой проблемы, желанием обязательно решить эту проблему, изучить различные подходы к ее решению, исследовать различные варианты постановки этой проблемы в зависимости от изменяющихся условий и т. д.

Развитию этого качества мышления у учащихся способствуют рассмотрение различных способов решения одной и той же задачи, различные определения одного и того же математического понятия, обращение к исследованию полученного результата и т. п.

[1] Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. М., 1969, с. 37.

[2] См.: Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. М., 1969, с. 38.

Так, например, учащиеся проявят активность мышления, если спросят учителя: «Почему на нуль делить нельзя?» Учитель будет способствовать развитию у школьников активности мышления, если, не отвечая на этот вопрос, предложит им самим показать, что принятое в математике условие о невозможности деления на нуль разумно, т. е. поставит мотивационную задачу, решение которой достаточно просто.

Придавая большое значение активности мышления школьников, С. Л. Рубинштейн писал: «Рассматривать усвоение как процесс «переноса» знаний из головы учителя в голову или сознание ученика — значит оперировать метафорами, за которыми скрывается механическое представление, будто воздействия педагога непосредственно, минуя собственную мыслительную деятельность учащегося, усваивающего преподносимые ему знания, порождают в голове учащегося нечто, становящееся его достоянием»[1].

Качество мышления, которое является антиподом данному качеству, есть *пассивность* мышления.

*Целенаправленность* мышления характеризуется стремлением осуществлять разумный выбор действий при решении какой-либо проблемы, постоянно ориентируясь на поставленную этой проблемой цель, а также стремлением к поиску наикратчайших путей ее решения.

Наличие у школьников этого качества мышления особенно важно при поиске плана решения математических задач, при изучении нового материала и т. д. Этому способствуют специально подобранные учителем задачи, посредством которых перед учащимися раскрывается целесообразность изучения новой темы и последовательность рассмотрения относящихся к ней вопросов.

Целенаправленность мышления дает возможность более экономичного решения многих задач, которые обычным способом решаются если не сложно, то слишком долго.

Такова, например, задача о вычислении суммы $1 + 2 + 3 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$. Поставив целью упростить вычисление посредством применения каких-либо законов сложения, школьник без труда установит известный способ вычисления этой суммы: $1 + 2 + 3 \ldots + 98 + 99 + 100 = (1 + 99) + (2 + 98) + \ldots (49 + 51) + 50 + 100 = 5050$.

Целенаправленность мышления тесно связана с таким нравственным качеством личности, как *любознательность*, своеобразным антиподом которому является *любопытство*. В основе того и другого качества личности лежит условный рефлекс, названный И. П. Павловым рефлексом «что такое?». Первое из этих качеств (любознательность) обогащает знания и опыт человека именно в силу своей целенаправленности; второе (любопытство), превращаясь в самоцель, гасит стремление человека к познанию, как только

---

[1] Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. М., 1958, с. 54.

оно удовлетворено. Поэтому в обучении математике следует всячески поощрять любознательность учащихся и не поощрять любопытства. Именно поэтому при решении квадратных уравнений в VII классе учителю не следует говорить о том, что существуют особые, неизвестные сейчас учащимся комплексные числа, которые будут решениями квадратного уравнения с дискриминантом, меньшим нуля. Не имея возможности рассмотреть со школьниками этот вопрос по существу на данном этапе обучения, упоминание о комплексных числах может возбудить у школьников лишь любопытство, а не любознательность.

«Чтобы обучаться, нам нужно только понимать то (приспосабливаться к тому), чему нас учат. Но, чтобы с пользой применять знания, нужно уметь задавать вопросы типа: «Так ли это?», «Почему?» — и особенно самый мощный из них: «А что, если..?». Человек, который постоянно задает такие вопросы, уже не просто учится»[1].

Антиподом любознательности является и *бесцельность мышления*.

*Организованность памяти.* Известно, что память дает возможность соблюдать принцип экономии в мышлении. В зависимости от содержания запоминаемого материала и от деятельности человека в процессе запоминания память делят на образную (двигательную, зрительную, слуховую), эмоциональную и словесно-логическую. В зависимости от целей деятельности различают память непроизвольную и избирательную. В зависимости от времени хранения информации в памяти различают память кратковременную (оперативную) и долговременную.

Таким образом, память каждого школьника является необходимым звеном в его познавательной деятельности; в свою очередь память зависит от характера этой деятельности: от ее целей и задач, мотивов и конкретного содержания.

В процессе обучения математике целесообразно развивать все указанные выше виды памяти. Так, например, указание учителя ученику, работающему на классной доске, «Говори и пиши!» весьма полезно, так как способствует одновременному развитию двигательной,зрительной и слуховой памяти.

*Организованность* памяти означает способность к быстрому и правильному воспроизведению необходимой информации. Важнейшим элементом памяти является *запоминание*. Антиподом *запоминания* является *забывание*. (Еще в 1885 году немецкий психолог Эббингауз установил, что уже через день человек забывает до 25% того, что он узнал днем раньше.) Однако в противоположность антиподам других качеств мышления это качество мышления играет немалую положительную роль в познавательной деятельности школьника. Именно благодаря забыванию мелких и незначительных фактов учащийся получает возможность запомнить достаточно большую по объему и богатую по содержанию учебную информацию.

[1] Финк Д. Вычислительные машины и человеческий разум. М., 1970, с. 234.

По существу организованность памяти означает способность к «срочному» запоминанию и воспроизведению «очищенных» от деталей содержания соотношений, составляющих основу способа решения той или иной задачи. Поэтому учителю математики следует особенно заботиться о том, чтобы не загружать память учащихся ненужной или незначительной информацией.

Установлено, что память развивается у школьников особенно эффективно, если запоминание каких-либо фактов основано на понимании их сущности. Поэтому зубрежка школьниками многочисленных правил является не только непродуктивной деятельностью, но и попросту вредной. Так, например, наш опыт работы в одном из экспериментальных четвертых классов школы № 352 Москвы показал, что учащиеся, изучившие наряду с десятичной нумерацией натуральных чисел нумерации недесятичные (т. е. усвоившие принцип позиционной нумерации), при проведении обычных вычислений (по известным запомнившимся им алгоритмам) ошибались значительно реже, чем школьники обычных четвертых классов.

В процессе обучения математике развитию и укреплению памяти школьников способствуют: а) мотивация изучения; б) составление плана учебного материала, подлежащего запоминанию; в) широкое использование в процессе запоминания сравнения, аналогии, классификации и т. п. Следует чаще побуждать учащихся к запоминанию главного в изученном материале, схемы доказательства той или иной теоремы, итогов решения той или иной задачи и т. п.

*Широта* (обобщенность) *мышления* характеризуется способностью к формированию обобщенных способов действий, имеющих широкий диапазон переноса и применения к частным, нетипичным случаям.

Это качество мышления часто проявляется в готовности школьника принять во внимание новые для него факты в процессе деятельности в известной (знакомой ему) ситуации. Так, например, изучив распределительный закон умножения относительно сложения, записанный в форме $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, школьник проявит известную широту мышления, если сразу сумеет применить этот закон в вычислении: $2{,}5 \cdot 73{,}7 + 26{,}3 \cdot 2{,}5$.

Развитию этого качества мышления у учащихся способствует проведение различных классификаций изучаемых математических фактов и проведение их обобщений, использование аналогии и обобщения как методов решения задач.

Антиподом широты (обобщенности) мышления является *узость* мышления.

*Глубина мышления* характеризуется способностью глубокого понимания каждого из изучаемых математических фактов в их взаимосвязи с другими фактами.

Глубина мышления проявляется также в умениях отделять главное от второстепенного, обнаружить логическую структуру рас-

суждения, отделить то, что строго доказано, от того, что принято на веру, извлекать из математического текста не только то, что в нем сказано, но и то, что содержится «между строк».

Конкретным примером проявления этого качества мышления может служить выполнение следующего задания: «Известно, что сложению соответствует одно обратное действие — вычитание; то же самое можно сказать и об умножении (хотя это действие более высокой ступени). Почему же действие возведение в степень имеет два себе обратных действия: извлечение корня и логарифмирование?»

Недействительность переместительного закона при возведении числа в степень оказывается для школьников весьма «глубоким» свойством.

Антиподом глубины мышления является *поверхностность* мышления. Именно этим можно объяснить обычное для учащихся затруднение, возникающее при ответе на следующий вопрос: «Является ли последовательность вида 2, 2, 2, ... прогрессией; если является, то какой?»

Усвоив поверхностно определение прогрессии, учащиеся не понимают, что ответ на этот вопрос целиком и полностью зависит от того, оговорена ли в определении возможность равенства нулю разности (или единице знаменателя) прогрессии.

*Критичность мышления* характеризуется умением оценить правильность выбранных путей решения проблемы и получаемые при этом результаты с точки зрения их достоверности, значимости и т. п. В процессе обучения математике воспитанию этого качества мышления у учащихся способствует постоянное обращение к различного вида проверкам, грубым прикидкам найденного (искомого) результата, а также к проверке умозаключений, сделанных с помощью индукции, аналогии и интуиции.

Критичность мышления можно воспитывать у школьников при выполнении специальных учебных заданий на нахождение и исправление собственных ошибок. Иногда бывает полезно учителю совместно с учащимися проследить весь ход ошибочных рассуждений до конца, чтобы натолкнуть школьников на противоречие, которое поможет им осознать ошибку. Развитию критичности мышления школьников способствует решение задач типа *AXRB* (по данной нами типологии[1]), задач-софизмов и т. д.

К сожалению, антипод данного качества мышления — *некритичность* — еще свойствен многим учащимся средней школы.

Такие качества, свойственные математическому стилю мышления, как *ясность*, *точность*, *лаконичность речи и записи*, *оригинальность* (нешаблонность)[2] мышления и его *доказательность*, не нуждаются в особых комментариях.

---

[1] См.: с. 60.

[2] Э. де Боно. Рождение новой идеи. О нешаблонном мышлении. М., 1976.

Заметим, что развитию первого из названных качеств способствуют широкое применение логико-математической символики, а также постоянное внимание учителя к точности речи и записи учащимися заданий в процессе обучения. Совершенно недопустимы с этой точки зрения такие, например, вопросы, поставленные в ходе решения некоторой задачи: «Сколько центнеров (*чего?*) собрали (*кто? где?*) к концу пятилетки?»

Говоря об оригинальности мышления, отметим, что весьма полезным являются необычные решения известных задач, которые могут быть предложены как учащимися, так и учителем. Таково, например, приведенное ниже решение известной задачи. Доказать тождество:

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Допустим, что данное равенство является не тождеством, а уравнением относительно параметра $x$. Тогда это уравнение является уравнением не выше второй степени относительно $x$, а значит, может иметь не более двух корней. Однако нетрудно обнаружить, что в этом случае не два, а три значения удовлетворяют уравнению, поэтому данное равенство есть тождество и т. п.

Говоря о доказательности мышления, отметим, что наличие этого качества мышления предполагает наличие определенного навыка терпеливого собирания фактов до вынесения какого-либо суждения, а также навыка поиска подлинной причинности и истинной взаимосвязи между изучаемыми учениками математическими фактами.

Понятно также, что математическое мышление относится (как вид к роду) к мышлению естественнонаучному.

Естественнонаучное мышление характеризуется:

1) приобретением естественной научной информации и знаний (знанием фактов, специальных терминов, умением воспроизводить устно законы и правила, определять форму, структуру, процессы и их функции, умением объяснять значение закона);

2) формированием умения пользоваться естественнонаучными знаниями на практике, обогащением жизненного опыта путем использования в быту знаний законов природы, умением различать факты и гипотезы, ставить эксперименты и проверять выводы, делать обобщения на основе экспериментальных данных.

Так как мышление неотделимо от деятельности, понятно, что и естественнонаучное мышление может быть охарактеризовано со стороны соответствующих ему умений осуществлять поэтапное решение естественнонаучных проблем. Совокупность этих умений определяет так называемый естественнонаучный метод познания, который состоит из следующих элементов:

1) понимание проблемы;

2) точное определение ее и отграничение от других проблем;

3) изучение всех ситуаций, связанных с данной проблемой;
4) планирование поиска решения проблемы;
5) выбор наиболее вероятной гипотезы;
6) планирование эксперимента по проверке гипотезы;
7) проведение эксперимента по проверке гипотезы;
8) проведение контрольного эксперимента;
9) выводы и их обоснование; выбор оптимального способа решения;
10) распространение выводов на новые ситуации, в которых действуют те же факторы.

Именно эти элементы определяют разработку и применение различных конкретных методов обучения школьников естественным наукам.

Обладая всеми чертами естественнонаучного мышления, математическое мышление, естественно, имеет свою специфику.

В тех методико-математических исследованиях, где речь идет о развитии математического мышления школьников, встречаются термины, обозначающие ту или иную разновидность (тип) математического мышления. Так, например, часто говорят о необходимости развития у школьников логического мышления, функционального мышления, пространственных представлений и т. д.

Рассмотрение указанных типов мышления в методико-математической литературе обусловлено тем, что в процессе обучения математике возникает необходимость сформировать у учащихся способность к распознаванию (восприятию) соответствующих понятий (идей) в других объектах изучения, а также способность активно пользоваться соответствующими знаниями.

Так, например, *функциональное мышление*, характеризуемое осознанием динамики общих и частных соотношений между математическими объектами или их свойствами (и умением это использовать), ярко проявляется в связи с изучением одной из ведущих идей школьного курса математики — идеи функции.

Сформированность *пространственного воображения* (пространственно-схематического мышления) характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические модели изучаемых объектов и выполнять над ними операции, соответствующие тем, которые должны были быть выполнены над самими объектами.

Известно, что невысокий уровень развития пространственно-схематического мышления обычно затрудняет изучение стереометрии, так как оно не формируется сразу; для его успешного развития обычно требуется кропотливая предварительная подготовка учащихся.

При эффективном обучении математике учитель обычно использует так называемый конкретно-индуктивный или абстрактно-дедуктивный метод преподавания. При этом возникает необходимость (из дидактических соображений) говорить о конкретном (предметном) или абстрактном мышлении школьников.

*Логическое* мышление характеризуется обычно умением выводить следствия из данных предпосылок, вычленять частные случаи из некоторого общего положения, теоретически предсказывать конкретные результаты, обобщать полученные выводы и т. п. Развитие логического мышления школьников в процессе обучения математике является предметом заботы учителей и методистов. Логическое мышление проявляется и развивается у учащихся прежде всего в ходе различных математических выводов: индуктивных (полная индукция) и дедуктивных, в ходе доказательств теорем, обоснований решения задач и т. д.

Значительно реже в методико-математической литературе встречается термин «*интуитивное*» мышление. Однако опытный учитель всегда уделяет должное внимание развитию у школьников сообразительности, способности к догадке.

Эти разновидности математического мышления являются не чем иным, как особыми формами проявления диалектического мышления в процессе изучения математики. Можно, например, указать на тот факт, что так называемое функциональное мышление является адекватным осознанию изменчивости, взаимосвязи и взаимозависимости понятий и соотношений, характерным для диалектического мышления.

Наряду с задачей развития логического мышления должна решаться и более общая задача — воспитание логической грамотности. Под *логической грамотностью* понимаются логические знания и умения, которые дают возможность для успешного обучения в школе, для дальнейшего обучения и самообразования, для успешной общественно полезной практической деятельности в повседневной жизни.

Исследования показали, что от выпускников средней школы требуется овладение следующими логическими знаниями и умениями:

1) умение определить известное понятие;

2) знание правил классификации;

3) понимание смысла логических связок «и», «или», «не», «если... то», «следует», «эквивалентно» (логически);

4) умение выделить логическую форму математического предложения;

5) понимание смысла терминов «необходимо» и «достаточно» (и их отрицания), а также их сочетаний;

6) умение проводить доказательства утверждений, знать наиболее употребительные приемы доказательства, обнаруживать грубые логические ошибки;

7) умение правильно организовывать и рационализировать свою деятельность в соответствии с внутренней логикой ситуации;

8) умение мыслить критически, последовательно, четко и полно;

9) владение основными мыслительными приемами (анализ, синтез, обобщение, сравнение и т. п.) в простейших случаях и т. д.[1].

Развитие логического мышления учащихся в процессе обучения математике есть прежде всего развитие теоретического мышления, которое представляет собой один из важнейших аспектов развития диалектического мышления. В самом деле, не только в ходе обучения, но и в ходе воспитания, в особенности в процессе формирования диалектико-материалистического мировоззрения школьников, предполагается целенаправленная работа учителя по развитию логического мышления, основанная на самом содержании учебного материала и его методологии. Конечным итогом обучения любому предмету (в том числе и математике) должно быть подведение учащихся к наиболее общим философским выводам о видах и формах существования материи. При этом важно, чтобы эти выводы и обобщения были сделаны самими учащимися в процессе размышления над логикой тех или иных посылок и следствий, при изучении конкретного учебного предмета.

«Мысль включить ж и з н ь в логику понятна — и гениальна — с точки зрения *процесса* отражения в сознании (сначала индивидуальном) человека объективного мира и проверки этого сознания (отражения) практикой...»[2].

Кроме того, само «...искусство оперировать понятиями не есть нечто врожденное и не дается вместе с обыденным повседневным сознанием...»[3]. Иными словами, целенаправленное формирование логического мышления учащихся должно быть предметом особого внимания учителя-воспитателя. Таким образом, с научной точки зрения говорить об указанных типах мышления как о компонентах, присущих только математическому мышлению, было бы неверно. С дидактических позиций выделение этих компонентов математического мышления возможно и даже целесообразно, так как целенаправленная работа учителя по формированию у школьников функционального, логического, интуитивного и т. д. мышления реализует задачу математического развития учащихся в целом.

Использование условной терминологии дает возможность ориентировать учителя на ту или иную сторону развития математического мышления у школьников в соответствующих методических рекомендациях. Так, например, говоря о необходимости развития у учащихся абстрактного мышления, можно рекомендовать учителю, приступающему к преподаванию систематического курса геометрии, начать с рассмотрения реальной ситуации — задачи проведения трубопровода между двумя пунктами. Сам трубопровод представляет собой реальный объект, обладающий самыми различными, важными в практическом смысле свойствами: весом отдель-

---

[1] См.: Н и к о л ь с к а я И. Л. Привитие логической грамотности при обучении математике. Автореф. канд. дис. М., 1973.

[2] Л е н и н В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 184.

[3] М а р к с К. и Э н г е л ь с Ф. Соч., т. 20. М., 1961, с. 14.

ных звеньев, качеством металла, размерами, формой, протяженностью, качеством покрытия, пропускной способностью и т. д.

Начиная проектировать строительство трубопровода, инженер-конструктор прежде всего будет интересоваться протяженностью и трассой, по которой он будет проложен. На этом уровне конструктор отвлекается от всех других свойств этого объекта, обращая внимание лишь на названные. Возникает абстрактная модель трубопровода в виде геометрической линии. Руководствуясь оптимальными условиями эффективной работы трубопровода, инженер начинает изучать вопрос о форме и размерах этого трубопровода, не интересуясь теперь тем, по какой трассе он будет проложен. Возникает новая абстрактная модель этого же объекта, представленная в виде геометрического тела. Прораб, который руководит обкладкой трубопровода изоляционным материалом (или окраской трубопровода, защищающей его от коррозии), имеет дело уже с другой абстрактной моделью трубопровода: он рассматривает его как геометрическую поверхность.

Решение этой и других аналогичных задач устанавливает полезность рассмотрения таких свойств объекта, как размеры, форма и положение в пространстве. Возникает целая отрасль научного знания об объектах реальной действительности, называемая геометрией, в которой изучают именно эти свойства реальных объектов.

Таким образом, тезис В. И. Ленина о том, что диалектика вещей создает диалектику идей[1], имеет отношение не только к анализу природы абстракции, но и к методам преподавания математики. Говоря о том, что в процессе обучения математике необходимо развивать абстрактное мышление школьников, мы имеем в виду широкое использование методических приемов, аналогичных приведенному.

Многие черты математического мышления проявляются в мышлении творческом. Однако вряд ли имеет смысл говорить о творческом математическом мышлении, так как творческое мышление является весьма общей категорией, проявляющейся в умственной и практической деятельности человека.

Органическое сочетание самых разнообразных компонентов мышления и различных его качеств (в том числе и мышления математического) проявляется в особых способностях человека, дающих ему возможность успешно осуществлять творческую деятельность в самых разнообразных областях науки, техники и производства.

К числу таких способностей относятся:

1) способность к правильному и быстрому восприятию, способность к пространственному воображению;

2) способность к быстрому сосредоточению и переключению внимания с сохранением его устойчивости и интенсивности на любых избранных объектах;

[1] См.: Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 152—153.

3) наличие хорошей избирательной памяти (образной и моторной, эмоциональной и словесно-логической), способность репродуцировать ведущие знания и опыт;

4) способность к сильному творческому воображению (умение создавать новые комбинации из известных понятий, явлений и фактов);

5) способность оценивать ситуацию сразу с различных точек зрения, способность видеть больше того, что есть и что очевидно;

6) способность проникать в сущность основных взаимосвязей, скрытых в данной проблеме, перед тем как приступить к ее решению (включая и тот случай, когда эти связи выражены символически);

7) устойчивую потребность в познании нового, проблем, которые могут возникнуть;

8) образность, точность и сжатость речи, способность необычно отвечать на специфические вопросы;

9) способность создавать наглядно-действенные и наглядно-образные модели тех или иных ситуаций;

10) способность мыслить отвлеченно, схватывая главную суть закономерности изучаемого процесса или характеристические свойства той или иной ситуации;

11) способность к символическому оформлению собственных мыслей в соответствии с известными правилами, способность к схематическому и графическому их выражению;

12) способность устанавливать, какие элементы некоторого множества объектов подобны изучаемому объекту по внешним и внутренним их признакам;

13) способность установить класс, которому принадлежит данный объект, или тип, которому принадлежит данная проблема;

14) способность из многообразия свойств изучаемого объекта выделить наиболее важные и существенные и в том случае, когда эти свойства существуют в скрытом виде;

15) способность предвидеть конечные и промежуточные результаты проводимого исследования, способность осуществлять планирование решения проблемы;

16) способность выявлять подробности, полезные с точки зрения развития основной идеи решаемой проблемы;

17) способность выявлять различные функции изучаемого объекта в проблеме, чтобы использовать его по-новому; способность реорганизовать элементы структуры данной ситуации так, чтобы они функционировали по-новому;

18) способность осуществлять мысленный эксперимент, предваряя те или иные возможные действия, для того чтобы выбрать из них наиболее эффективные;

19) способность мысленно воспроизводить объект в различных последовательных его состояниях;

20) способность к открытию различных связей между объектами

и идеями, умение использовать логические связи для проверки достоверности сделанного вывода;

21) способность выдвигать оригинальные идеи в разнообразных ситуациях; способность применить в новой ситуации известную идею;

22) способность к математическому моделированию жизненных ситуаций;

23) способность вовремя отказаться от привычных методов решения проблемы, если они оказываются недейственными, и организовать поиск новых путей ее решения;

24) способность в случайных фактах, явлениях, образах найти опорный факт, полезный для решения данной проблемы, и т. д.[1]

Важно также отметить, что к числу качеств, присущих творческой личности, справедливо относят и такие качества, как:

1) глубокие и широкие знания в области своей деятельности;
2) всестороннюю (или узконаправленную) любознательность;
3) мечтательность, склонность к фантазии;
4) независимость суждений;
5) находчивость, способность к импровизации;
6) склонность к риску и т. д.

Нетрудно усмотреть, что в перечисленных качествах творческой личности проявляется высокий уровень развития самых разнообразных компонентов, присущих математическому мышлению. Так, например, в п. 2—6 названные способности представляют собой сочетание различных качеств, свойственных научному стилю мышления. Способности, перечисленные в п. 10—13 и др., представляют собой проявление качеств, характерных для абстрактного мышления; способности, перечисленные в п. 18—22 и др., представляют собой качества, присущие функциональному мышлению, и т. д.

Так называемые математические способности есть не что иное, как совокупность (может быть, даже только некоторых) из перечисленных качеств творческой личности, сформированных (и применяемых) в деятельности математического характера.

Мы глубоко убеждены в том, что не существует здорового ребенка, у которого многие качества, присущие математическому мышлению, не могли бы быть успешно развиты в процессе обучения и воспитания, и при этом не отрицая того факта, что отдельные школьники обладают врожденной восприимчивостью к развитию математического мышления.

Вся система средств и методов обучения математике не будет способствовать достижению этой цели, если не будет строиться с явной ориентацией на математическое развитие школьника. Осуществляя целенаправленное математическое развитие школьников, следует помнить, что задачи являются здесь наиболее естественным и наиболее эффективным средством.

[1] См.: Зворыкин А. О разработке проблемы научного творческого мышления. — «Наука и жизнь», 1967, № 1, с. 100—104.

Общность категории творческого мышления не должна препятствовать развитию его у школьников именно (и прежде всего) в процессе обучения математике. Конечно же, творческое мышление школьников может (и должно) развиваться в процессе изучения наук как естественных, так и гуманитарных. Однако специфика математики и обучения математике такова, что дает нам в этом большие возможности, чем любой другой учебный предмет. При этом следует помнить, что цель школьного обучения математике — дать качественное математическое образование всем учащимся, хотя многие из них могут избрать профессию, далекую от математики. Обеспечив же на материале математики развитие творческих потенций учащихся, мы будем способствовать эффективной деятельности школьников в дальнейшем, в какой бы сфере народного хозяйства они ни работали.

Говоря о задачах развития математического мышления школьников следует, на наш взгляд, рассмотреть некоторые результаты исследований, проведенные кибернетиками.

Бурное развитие кибернетики (и ее приложений) привело к тому, что проблема моделирования мышления, проблема создания искусственного разума, стала весьма актуальной[1].

В решении поставленной проблемы кибернетиками широко используются результаты исследований психологов. Более того, многие известные психологи стали проводить исследования в рамках задач, выдвигаемых кибернетикой. И это не удивительно. Объект исследования — человек и его творческая деятельность — у тех и других один и тот же. Конкретные задачи исследования также одни и те же: вскрыть механизм интеллектуальной деятельности человека. Одним и тем же оказалось и основное средство исследования — решение человеком нестандартных задач.

Поначалу технические устройства, моделирующие эту деятельность, создавались на основе уже имеющихся в психологии знаний о человеческом восприятии и мышлении. Затем возникла идея использовать само кибернетическое моделирование как одно из средств изучения психической деятельности человека, в частности познавательной деятельности. При реализации этой идеи восприятие и мышление человека стали отождествлять с работой вычислительного устройства, решающего задачу. Структурные и функциональные характеристики восприятия и мышления, рассматриваемые в системе психологических понятий, стали переводиться в соответствующие характеристики системы понятий кибернетики.

По своеобразной энциклопедии — большому словарю Уэбстера интеллект означает:

«а) способность понимать или обучаться на опыте; способность приобретать и сохранять знания; умственные способности;

б) способность быстро и правильно реагировать на новую си-

[1] См.: Амосов Н. М., Касаткин А. М., Касаткина Л. М., Талаев С. А. Автоматы и разумное поведение (Опыт моделирования). Киев, 1973, с. 7.

туацию, умение рассуждать при решении проблем, выборе образа действий и т. д.;

в) в психологии — мера успешности в пользовании названными способностями при выполнении конкретной задачи»[1].

В развернутом виде эти характеристики означают:

а) *уметь обучаться* — распознавать, запоминать и организовывать информацию;

б) *понимать* — уметь связывать приобретенные знания друг с другом, с фактами и явлениями реальной действительности;

в) *обладать* умением эффективно реагировать на новую ситуацию — *умственной приспособляемостью.*

Далее отмечается, что «интеллект ... проявляется как способность к решению задач, к решению которых не имелось предварительной специальной подготовки, и как способность направлять собственные действия, способность следовать указаниям и указывать действия другим»[2].

Определение интеллекта, на наш взгляд, достаточно емкое. Более локальными, но весьма интересными выглядят свойства, присущие человеку, по которым он превосходит любую ЭВМ.

Американские кибернетики Э. Маккормик и Л. Фогель выделяют следующие свойства:

1) способность фильтровать информацию от случайных данных;

2) способность создавать определенные структуры в материале случайного характера;

3) способность обладать корреляционной памятью (памятью, в которую постоянно вносятся поправки);

4) способность качественно перерабатывать полученную информацию;

5) гибкость в выполнении операций и способность к самопрограммированию;

6) способность ориентироваться на события с низкой вероятностью появления;

7) способность обладать повышенной надежностью в неожиданных ситуациях;

8) способность в построении индуктивных умозаключений, в формировании новых понятий и принципов[3].

Д. М. Маккей перечисляет следующие свойства, «отличающие интеллект от простой способности вычислять»:

1) способность успешно перерабатывать информацию и объединять ее в зависимости от ее значимости;

2) способность совершать пробные действия (поиск и переходы, не вытекающие из наличной информации), совершать скачок через разрыв, существующий в данных;

---

[1] Финк Д. Вычислительные машины и человеческий разум. Под ред. А. В. Шилейко. М., 1967, с. 222.

[2] Там же, с. 223.

[3] См.: Бобнева М. И. Техническая психология. М., 1966, с. 116.

3) способность управлять поисковым и исследовательским п цессом, руководствуясь чувством «близости решения»;

4) способность рассматривать ограниченный, но достато большой круг положений, связанных с данной ситуацией.[1]

Известные советские кибернетики А. Г. Ивахненко и В. Г. Ла говоря о характеристике сложных систем автоматического упр ления, выделяют следующие «функции интеллектуального хар тера», которыми должна обладать такая система:

1) сопоставление различных вариантов решения задачи;

2) выбор наилучшего варианта в соответствии с определенны критериями;

3) учет изменения внешних воздействий и изменение в св с этим характера решения и критериев;

4) способность обучаться предсказанию — «...одно из важн качеств, присущих человеческому мышлению»[2].

Характеризуя это последнее качество, А. Г. Ивахненко В. Г. Лапа отмечают: «Ни одно действие не совершается человек без того, чтобы он в достаточно определенной форме не пред дел результатов этого действия»[3].

Более того, в литературе можно встретить более силы утверждение: «Разумное поведение можно рассматривать как со тание способности предсказывать состояние внешней среды с п образованием каждого предсказания в подходящую реакцию свете заданной цели»[4].

*Способность к предсказанию*, обязательное наличие определе ного замысла в деятельности любого рода, а тем более в интелл туальной, представляется нам существенной отличительной че той человека.

На способность человека заранее предвидеть результат свое труда указывал К. Маркс, отмечая, что он «...уже в начале это процесса имелся в представлении человека, т. е. идеально»[5].

Следует специально отметить, что если способность челове к интуитивному мышлению упоминается кибернетиками (хотя в неявном виде), то эмоциональный аспект человеческого мышлен остается вне их поля зрения.

В отличие от человека машина лишена не только интуици но и всяких эмоций, роль которых в творческой деятельности ч ловека трудно переоценить. Поэтому в эмоциональном мотивацио ном плане человек также значительно превосходит машину.

---

[1] См.: Основные направления исследований психологии мышления капиталистических странах. Под ред. Е. В. Шороховой. Сб. статей. М 1966, с. 290.

[2] Ивахненко А. Г., Лапа В. Г. Кибернетические предсказ вающие устройства. Киев, 1965, с. 3.

[3] Там же, с. 4.

[4] Фогель Л., Оуэн А., Уолш М. Искусственный интелле и эволюционное моделирование. М., 1969, с. 31.

[5] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 23, с. 189.

Итак, в ходе исследований по созданию искусственного разума кибернетиками выявляются такие качества мышления, которые настолько специфичны именно для человека, что даже приближенная их имитация в «думающей» машине чрезвычайно трудна (если не невозможна совсем). Именно в этом, по нашему мнению, и состоит основная ценность результатов этих исследований для педагогики, и в частности для методики обучения математике.

Установленные кибернетиками свойства, отличающие человеческий интеллект от машинного «интеллекта», являются, пожалуй, наиболее целесообразной программой развития человеческой личности в процессе обучения, и в частности в обучении математике.

Цели обучения и цели кибернетиков, работающих в области машинного «интеллекта», в определенном смысле различны. Если основной задачей кибернетиков является возможно более полное моделирование мышления с помощью различных ЭВМ, то целью обучения является дальнейшее совершенствование в первую очередь именно тех качеств ума и личности человека, своего рода фундамента человеческого интеллекта, которые так трудно поддаются моделированию.

Понятно, что, чем содержательнее и богаче будет человеческий интеллект, тем труднее будет создавать его искусственную модель. Впрочем, это уже забота самих кибернетиков.

Целенаправленное развитие вышеуказанных качеств мышления предполагает наличие определенных типов задач, способов их постановки и решения в ходе школьного обучения любому предмету, прежде всего математике.

Итак, математическое образование представляет собой сложный процесс, основными целевыми компонентами которого являются:

а) сообщение (приобретение) определенной системы математических фактов и идей;

б) научение (овладение) определенными математическими умениями и навыками;

в) развитие математического мышления.

До недавнего времени считалось, что успешная реализация первой и второй из этих целей математического образования автоматически повлечет за собой успешную реализацию и третьей цели, т. е. считалось, что развитие математического мышления происходит в процессе обучения математике стихийно (спонтанно). В какой-то мере это было верно, но только в какой-то мере!

Результаты исследований многих советских и зарубежных психологов показали, что математическое мышление является не только одним из важнейших компонентов в процессе познавательной деятельности учащихся, но и таким компонентом, без целенаправленного развития которого невозможно достичь эффективных результатов в обучении системе математических знаний, умений и навыков.

Общепризнанна тесная связь мышления и процесса решения задач, которая синтезирована в высказывании о том, что «мышление психологически выступает как деятельность по решению задачи»[1]. Правда, некоторые психологи правомерно считают неверным отождествление мышления с процессом решения задачи. «Решение задачи, — пишет А. В. Брушлинский, — осуществляется только с помощью мышления и никак иначе не осуществимо. Но мышление совершается не только в связи с решением задачи»[2]. Оно имеет место и при усвоении знаний, понимании текста, в процессе составления задач, их выявления или осознания. Вместе с тем он же высказывает мысль о том, что мышление лучше всего формировать «именно в ходе решения задач, когда человек сам наталкивается на посильные для него проблемы и вопросы, формулирует их и затем решает»[3].

До недавнего времени результаты психологических исследований мышления использовались в практике обучения в школе преимущественно следующим путем. Исследуя процесс решения задачи человеком, выявлялись те приемы, которые приводили к решению определенных типов задач, а затем посредством так называемого обучающего эксперимента проверялась их педагогическая эффективность. Таким образом, ставилась цель сформировать у учащихся конкретные приемы мышления, органически связанные с вычленением и фиксацией определенных операций, без раскрытия того мыслительного процесса, в ходе и в результате которого они выступают.

Однако проблема развития мышления учащихся или даже важнейшая ее часть заключается в другом. Развитие математического мышления предполагает не столько развитие у учащихся способности к овладению фиксированными операциями и приемами, сколько способности к обнаружению новых связей, овладения общими приемами решения новых задач. Проще говоря, у учащихся следует формировать общие приемы мышления, а не приемы мышления в конкретной ситуации.

Общие проблемы мышления формируются на основе овладения частными приемами мышления, которые тесно связаны с конкретным содержанием изучаемого материала. Так, например, обучаясь решению конкретных текстовых задач методом уравнения (задачи на движение, задачи на совместную работу и т. д.), учащиеся на основе овладения умениями составлять уравнение по условию задач данных конкретных типов овладевают одним из общих приемов решения задач — методом составления уравнения. Этот прием решения задач является своеобразной формой проявления аналитического мышления.

---

[1] Тихомиров О. К. Структура мыслительной деятельности человека. М., 1969, с. 293.

[2] Брушлинский А. В. Психология мышления и кибернетика. М., 1970, с. 57.

[3] Там же.

Таким образом, сформировавшись на некотором конкретном математическом материале, общие приемы отличаются универсальностью, а также возможностью их переноса в другие сферы математической деятельности.

## ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ЗАДАЧИ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Решение многих задач требует от человека хорошо развитой способности к творческой деятельности или по крайней мере способности и умения отыскать более или менее оптимальное в данных условиях решение. Поэтому не удивительно то большое значение, которое современная наука придает изучению процесса человеческой деятельности, поискам эффективных способов управления этой деятельностью как в сфере производства, так и в обучении.

«Почти всегда изучение любой человеческой деятельности — в труде или игре — можно проводить как изучение *ситуаций, в которых приходится принимать решения*, то есть таких ситуаций, когда один человек нли группа людей сталкиваются с необходимостью выбора какого-нибудь одного из нескольких действий (хотя бы из двух). Поэтому изучение человеческой деятельности можно в основном свести к изучению поведения человека в условиях производимого им выбора, то есть в условиях ситуаций, в которых нужно принимать решение»[1], т. е. в процессе решения человеком различных задач.

Проблема решения задач как чисто математических, так и задач, возникающих перед человеком в процессе его производственной или бытовой деятельности, изучается издавна, однако до настоящего времени нет общепринятой трактовки самого понятия *задачи*. «Понятие задачи обычно используется только в ограниченном объеме: говорят о научных (математических, физических и т. п.) задачах, о задачах в образовании, о задачах политических, хозяйственных, технических. Общее понятие задачи еще не выработано»[2].

Главной причиной такого положения дел, несомненно, являются прежде всего объективные трудности, связанные с характеристикой этого понятия в общем виде. Вместе с тем немалое значение имеет и то обстоятельство, что до недавнего времени для большинства исследователей наибольшую практическую ценность представляло изучение *процесса* решения задач человеком как важной поведенческой проблемы, а также путей повышения эффективности процесса решения задач человеком (или машиной).

Если термин «задача» понимать достаточно широко (в частности, включить в число задач и любое вычислительное упражнение и

[1] Карр Ч., Хоун Ч. Количественные методы принятии решений в управлении и экономнке. М., 1966, с. 16.

[2] Поиомарев Я. А. Психология творческого мышления. М., 1960, с. 109.

любую теорему, доказательство которой предстоит установить или изучить, если считать задачей установление тех или иных признаков изучаемого математического понятия и отбор среди них тех, которые характеризуют это понятие, и т. д.), то станет понятным высказывание о том, что «...занятие математикой состоит в решении задач»[1].

Поэтому, прежде чем говорить о том, какие математические задачи следует рассматривать в школьном курсе математики и как обучать школьников решению задач, как обучать математике через задачи, нужно уточнить, что следует понимать под термином «задача».

Как уже говорилось, общее понятие задачи четко еще не раскрыто, т. е. еще не найдено такого определения (или описания), которое могло бы удовлетворить всех тех, кому приходится заниматься вопросами, так или иначе связанными с понятием задачи. И это не удивительно. Понятие задачи очень емко, а вопросы, связанные с использованием этого понятия, весьма разнообразны. Так, понятие задачи является одним из важнейших понятий и в психологии, и в кибернетике, и в любой из наук естественно-математического цикла и, наконец, в теории и практике обучения и воспитания. Ясно, что в силу специфики той или иной научной дисциплины исследуются те или иные стороны, те или иные аспекты этого объекта.

Исходя из специфики той или иной науки, из ее запросов и возможностей, исследователь обычно дает такое определение того или иного понятия, строит такую теоретическую модель того или иного явления, которые наиболее адекватно отражают существенные для этой науки стороны изучаемого объекта. «Дефиниций, — писал В. И. Ленин, — может быть много, ибо много сторон в предметах...»[2].

В этом смысле понятие задачи не является исключением: специфически-односторонних определений (или описаний) этого понятия на сегодняшний день немало. Укажем и проанализируем некоторые из них, чтобы на основе этого анализа выявить наиболее существенные и наиболее общие свойства, присущие понятию задачи.

Прежде всего, можно выделить группу исследований, авторы которых считают термины «упражнение», «вопрос», «задача», «проблема» синонимами.

Так, М. А. Данилов в разделе «Упражнения, решения задач» книги «Процесс обучения в советской школе» пишет: «В теории и практике обучения доказано, что образование умений и навыков происходит главным образом в процессе упражнений. Упражнение — сознательное многократное выполнение сходных действий,

[1] Вольф Ф. Проблемы в преподавании математики. — В кн.: Роль аксиоматики и решение задач по математике. Совет конференции математических наук. Вашингтон. Гинн и К°, 1966, с. 138.

[2] Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 216.

опирающихся на знания, на различном (но в отношении цели упражнения — сходном) материале, применяемое с целью овладения умением и навыком»[1].

Таким образом, с точки зрения автора, упражнение и учебная задача представляются понятиями эквивалентными. Больше того, у М. А. Данилова понятие задачи в определенной степени отождествлено с понятием процесса ее решения. Отождествление понятия задачи с понятием вопроса можно обнаружить у авторов некоторых учебников по психологии. Понятно, что отождествление понятий задача, вопрос, упражнение не только не правомерно, но и приводит к большой неопределенности в любой попытке использовать эти описания понятия задачи в качестве рабочих.

В частности, неправомерность отождествления понятий задачи и вопроса подтверждается, например, тем, что в определенном смысле всякую задачу можно заменить некоторым вопросом. Однако далеко не всякий вопрос является задачей, хотя бы в силу того, что для одного субъекта ответ на вопрос может быть известен заранее, а для другого сама постановка вопроса может оказаться непонятной[2].

Вопрос выступает лишь как определенное указание к действию (решению задачи), являясь, таким образом, свойством, сопутствующим задаче (или одним из ее компонентов).

«Поскольку задачу можно рассматривать как некоторую особую форму познания действительности, она сама выступает прежде всего как объект, детерминирующий процесс мышления человека»[3].

По меткому замечанию Г. А. Балла, «заманчиво было бы представить совокупность задач как нечто существующее во внешнем мире и не зависящее от того, кто решает задачу... такой подход является только первым приближением к проблеме»[4]. И действительно, в процессе школьного обучения учащимся предлагается немало задач (помещенных в учебниках или составленных учителем). На первый взгляд это множество задач существует независимо от учащихся. Однако в действительности каждая задача становится задачей по существу лишь тогда, когда сам учащийся «принимает» эту задачу, т. е. начинает работать над ее решением. «Следовательно, задача в психологическом смысле берется в определенном отношении к человеку, она вызывает мышление, попытки ее решить, занимает нас. Эта «принятая» задача, в отличие от тех, которые по той или иной причине прошли мимо нас»[5]. И с этим нельзя не согласиться.

---

[1] Данилов М. А. Процесс обучения в советской школе. М., 1960, с. 206.

[2] См.: Познавательные задачи в обучении гуманитарным наукам. Под ред. И. Я. Лернера. Сб. статей. М., 1972, с. 23.

[3] Славская К. А. Детерминация процесса мышления. — В кн.: Исследования мышления в советской психологии. М., 1966, с. 211.

[4] Человек и вычислительная техника. Под ред. В. М. Глушкова. Киев, 1971, с. 65.

[5] Славская К. А. Мысль и действия. М., 1968, с. 143.

В последнее время немалое значение придается проблемной форме обучения, осуществляемой с помощью эвристических методов и приемов через решение специально подобранных и особо формулируемых задач. Появились исследования, в которых понятие задачи определяется (или описывается) через понятие проблемной ситуации, а в некоторых случаях даже оба понятия отождествляются.

Нет сомнения в том, что понятие задачи и проблемной ситуации имеют много общего. Однако в большинстве исследований эти понятия не отождествляются. Так, в одном из известных учебников психологии проблемная ситуация характеризуется как нечто «довольно смутное, еще не очень ясное и мало познанное впечатление, как бы сигнализирующее: что-то не так, что-то не то».

Относительно же понятия задачи там же сказано следующее: «Возникновение задачи — в отличие от проблемной ситуации — означает, что теперь удалось хотя бы предварительно и приближенно расчленить данное (известное) и неизвестное (искомое)»[1].

Обобщая точку зрения С. Л. Рубинштейна, который основной формой проявления задачи считает ее словесную речевую формулировку[2]; А. М. Матюшкин и Л. М. Фридман связывают понятие задачи с ее знаковым выражением. Так, например, А. М. Матюшкин указывает, что в проблемной ситуации необходимо «... найти новые (открыть или усвоить), ранее неизвестные знания или способы действия»[3], тогда как задача есть «способ знакового предъявления задания одним человеком другому (или самому себе), включающий указания на цель и условия ее достижения»[4].

Л. М. Фридман определяет задачу как «всякую знаковую модель проблемной ситуации»[5], считая понятие проблемной ситуации исходным.

Так как исследование Л. М. Фридмана специально посвящено задачам, остановимся детальнее на его характеристике понятия задачи и ее компонентов. Прежде всего отметим, что Л. М. Фридман четко различает понятия задачи и проблемной ситуации по следующим признакам:

1) проблемная ситуация существует реально, вне зависимости от какого-то языка, а задача всегда связана с языком, на котором она изложена;

2) проблемная ситуация всегда богаче содержанием, чем задача, ибо задача — это модель ситуации, отражающая лишь некоторые ее стороны;

---

[1] Общая психология. Учебное пособие для педвузов. Под ред. А. В. Петровского. М., 1970, с. 305.

[2] См.: Рубинштейн С. Л. Принципы и пути развития психологии. М., 1959, с. 64.

[3] Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972, с. 193.

[4] Там же, с. 189.

[5] Фридман Л. М. Психологический анализ задач. Сообщение I. Проблемные ситуации и задачи. — В кн.: Новые исследования в психологии возрастной физиологии. М., 1970, № 1, с. 54.

3) для каждой проблемной ситуации существует одна или несколько задач, которые могут отличаться друг от друга как совокупностью представленных в них свойств ситуации, так и языком, на котором задача выражена[1].

Прокомментируем эти положения.

Не возражая против первого положения по существу (действительно, всякая задача тесно связана с языком, на котором она выражена), вряд ли можно согласиться лишь с тем, что проблемная ситуация существует реально, а задача есть лишь абстрактная модель реальной ситуации (как это следует из контекста). Как и проблемная ситуация, так и задача — реальные объекты, которые не существуют вне их связи с субъектом; речь идет не о существовании того или иного, а о различиях качественного характера: в первом случае превалирует аспект пассивности, во втором — активности. Это качественное отличие проблемной ситуации от порожденной ею задачи ярко иллюстрируется определением задачи, данным А. Н. Леонтьевым, согласно которому задача — «это цель, данная в определенных условиях»[2].

И хотя А. Н. Леонтьев в своем определении понятия задачи явно не связывает понятия проблемной ситуации и задачи (а тем более не говорит о их различиях), в его определении нетрудно обнаружить существо дела: определенные условия существования задачи есть не что иное, как осознание субъектом проблемности некоторой ситуации; указание к ее разрешению (цель) приводит к возникновению задачи, как таковой.

Та же точка зрения отражена и в характеристике задачи, данной В. Н. Пушкиным: «Задача — это результат определенного этапа мыслительной деятельности человека. Постановка, формулировка задачи зависит от того, как была проанализирована проблемная ситуация»[3].

Второе положение Л. М. Фридмана также по существу правильно выражает положение вещей. Однако буквальное его истолкование может привести к некоторой нечеткости представлений о связи проблемной ситуации и задачи. Проблемная ситуация порождает задачу (или задачи) не сама по себе, а при активном участии субъекта, который усматривает в некоторой ситуации проблемный характер. Богатство содержания проблемной ситуации определяется прежде всего субъектом, так что говорить о сравнении (в буквальном смысле этого слова) проблемной ситуации и задачи по данному им признаку вряд ли правомерно. Кроме того, можно, наверное (хотя бы теоретически), представить такую задачу, которая исчерпает все богатство содержания данной ситуации, всю ее проблем-

[1] Фридман Л. М. Психологический анализ задач. Сообщение I. Проблемные ситуации и задачи. — В кн.: Новые исследования в психологии возрастной физиологии. М., 1970, № 1, с. 54—55.

[2] Леонтьев А. Н. Проблемы развития психики. М., 1972, с. 300.

[3] Пушкин В. Н. Эвристика — наука о творческом мышлении. М., 1967, с. 64.

ность по отношению к тому или иному субъекту. Что касается третьего положения, приведенного Л. М. Фридманом, то оно не вызывает возражений ни по существу, ни по форме.

Л. М. Фридман выделяет следующие составные части задачи:

1) предметная область, которая состоит из одного или нескольких фиксированных объектов (предметов) или одного или нескольких фиксированных множеств;

2) предикаты, которые связывают между собой объекты предметной области задачи.

Элементы и предикаты предметной области делятся на: а) постоянные и переменные; б) известные (данные) и неизвестные.

Среди неизвестных элементов и предикатов выделяются искомые (те значения, которые требуется установить по требованию задачи); остальные неизвестные элементы и предикаты соотнесены к числу вспомогательных (определенных и неопределенных).

По своей структуре любая задача состоит из трех частей: 1) условия задачи (обычно в виде высказывательной формы); 2) объекта задачи (какой-либо элемент предметной области или предикат или правило вывода); 3) цели задачи (которая состоит в нахождении значения объекта задачи, обращающего условие в верное высказывание)[1].

Оценивая определение задачи и описание ее структуры, данные Л. М. Фридманом, следует отметить, что в целом природу задачи он раскрывает правильно. Вместе с тем, характеризуя как саму задачу, так и ее основные компоненты, Л. М. Фридман, на наш взгляд, не уделяет должного внимания роли субъекта, перед которым задача поставлена. Понятие задачи, в его трактовке, излишне логизированно и выступает как нечто существующее вне субъекта, вне его отношения к ситуации, проблемность которой также определяется прежде всего субъектом, а не существует сама по себе как нечто заданное заранее.

Короче говоря, характеристика задачи, приводимая Л. М. Фридманом, излишне абстрагируется от субъекта. Приводимая же им характеристика проблемной ситуации («наше стремление к какой-то цели встречает преграду, препятствие и возникает потребность преодолеть это препятствие, чтобы осуществить намеченную цель»[2]) характеризует ее скорее как особый вид деятельности, тогда как, на наш взгляд, проблемная ситуация представляет собой особый результат деятельности субъекта.

К трактовке понятия задачи, данной Л. М. Фридманом, достаточно близко примыкает понимание задачи А. А. Столяром, ко-

---

[1] Фридман Л. М. Психологический анализ задач. Сообщение II. Составные части и структура задачи. — В кн.: Новые исследования в психологии и возрастной физиологии. М., 1970, № 2, с. 17.

[2] Фридман Л. М. Психологический анализ задач. Сообщение I. Проблемные ситуации и задачи. — В кн.: Новые исследования в психологии и возрастной физиологии. М., 1970, № 1, с. 53—54.

торый рассматривает это понятие с точки зрения его логической структуры.

А. А. Столяр понимает под задачей (в широком смысле) требование отыскания области истинности

$$M_{(x_1,\ x_2,\ldots,x_k)}\ [(x_1,\ x_2,\ldots,x_k) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_k \wedge \varphi(P_1, P_2, \ldots, P_n)].$$

Здесь через $A_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) обозначены множества, а через $P_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) — предикаты (свойства элементов этих множеств или соотношения между ними), составляющие ту «предметную область», в которой возникает задача.

Заметим попутно, что в приведенной характеристике не учитывается возможное наличие свойств или соотношений между множествами, входящими в предметную область задачи, или между их подмножествами.

Как и Л. М. Фридман, А. А. Столяр дает описание весьма узкого класса задач. По его собственному утверждению, данная структурная схема задачи «...хорошо применяется к задачам, сводящимся к решению системы уравнений или неравенств, и к другим типам задач, *обычно решаемых в школьном курсе* подчеркнуто мною.— *Ю. К.*), исключая задачи на доказательство»[1].

Признавая определенную полезность указанной схемы для структурного анализа некоторых традиционных задач школьного курса математики, вряд ли можно согласиться с тем, что с этой схемой дано описание задачи в широком смысле. Следует отметить также, что во многих случаях даже в задачах указанных типов установленные на системе множеств $A_i$ предикаты выражают те или иные свойства неоднозначно и потому проведение структурного анализа задачи прямо зависит от способа ее решения (самого решения и его теоретической основы), который должен применить решающий задачу человек.

Аналогичная точка зрения на понятие задачи была ранее высказана болгарским математиком-методистом И. Ганчевым, который представлял задачу (точнее, математическую задачу) как «последовательное выражение мысли, с помощью которого задается некоторое начальное подмножество $R$ на данном множестве $M$ математических объектов или соотношений и при этом требуется:

а) построить данное подмножество $R$ конструктивно или описательно, или

б) установить как $R$ задано на $M$ через другие его подмножества, или

в) показать, что объекты и соотношения из $R$ можно получить посредством определенных правил, характеризующих некоторые чертежные инструменты, или

---

[1] Столяр А. А. Педагогика математики (курс лекций). Минск, 1974, с. 174.

г) показать, что $R$ совпадает с некоторым множеством $R'$, которое считается известным»[1].

Множество $M$ И. Ганчев называет *областью решения* задачи; подмножество $R \subseteq M$ — *системой решения* (ответов) задачи; последовательность мыслей, выраженную словесно или символически, с помощью которой задается $M$, свойства объектов из $R$ и указание относительно искомого в $R$ — *текстом задачи* (отличая в последнем ту часть, в которой выражено *условие* задачи от части, в которой выражено ее *заключение*). Деятельность, с помощью которой выполняется требование, заданное текстом, — *процессом решения задачи*. *Решение* любой математической задачи И. Ганчев представляет как последовательность переходов от некоторых множеств $R_h$, заданных на $M$, к множеству $R$[2].

Подход к понятию задачи И. Ганчева является развитием подхода, характерного для исследований известного чехословацкого математика-методиста Яна Вишина, который также считает возможным дать определение любой математической задачи (и конечно же, при этом имеет в виду задачи, характерные для традиционного школьного курса математики) в следующем виде.

«Задача имеет место, если дано некоторое множество $Q$ математических объектов, и на этом множестве требуется найти подмножество всех объектов, которые удовлетворяют данным условиям или обладают данными свойствами. Множество $Q$ в этом случае назовем областью решения задачи»[3], а способы выявления искомого подмножества $R$ — системой решений задачи.

Используя понятия операции и соотношения для уточнения неопределенных, по его мнению, выражений «объект, удовлетворяющий данным условиям» или «обладающий данными свойствами», Я. Вишин предлагает определить понятие математической задачи следующим образом. «Пусть дано непустое множество $Q$. Определяющей (общей. — *Ю. К.*) математической задачей называется конструирование некоторого подмножества $R_1$, посредством заданных на этом множестве операций и соотношений»[4].

Следует отметить, что и такой модели понятия задачи свойственна узость, характерная для описаний задачи, данных А. А. Столяром и Л. М. Фридманом. Вместе с тем следует заметить, что модель задачи И. Ганчева — Я. Вишина оказывается действенной для всех традиционных задач школьного курса математики (на вычисление, построение и доказательство), что является несомненным ее достоинством. В отличие от модели задачи, предложенной А. А. Столяром, характеристика (и модель) задачи и процесса ее решения, принятая Я. Вишиным и И. Ганчевым, дает возможность

---

[1] Ганчев И. За математическите задачи. София, «Народна просвета», 1971, с. 11. (Здесь и далее перевод с болгарского автора).

[2] Там же, с. 11—12.

[3] Вишин Я. Методика за решаване на математически задачи. София, «Народна просвета», 1965, с. 6.

[4] Там же, с. 16.

осуществить не только структурный анализ задачи (оценить ее сложность), но и разработать конкретные методические рекомендации, повышающие эффективность работы школьников над решением многих классов задач, сохраненных в современном школьном курсе математики в качестве полезного наследия ее традиционного курса.

Интересно сопоставить изложенные психолого-педагогические определения (или описания) понятия задачи с тем, как характеризуют задачу кибернетики (или психологи), занимающиеся проблемой создания искусственного разума.

Для кибернетики прежде всего характерен подход, согласно которому каждая задача представляет собой некую логически организованную (со стороны ее внутренней структуры) ситуацию, в которой субъекту необходимо установить определенную последовательность операций, составляющих решение задачи.

«В таком случае «задача» предстает перед нами как некое утверждение (или цепь утверждений), выраженное в некоторой формальной логической системе. Решением задачи будет последовательность утверждений, каждое из которых содержит цепочку символов из алфавита этой системы. Последняя цепочка в решении будет собственно задачей, а первая всегда будет либо аксиомой, либо ранее доказанной теоремой в этой системе»[1].

Сравнивая эту характеристику понятия задачи с той, которая дается Л. М. Фридманом, А. А. Столяром и И. Ганчевым, нетрудно усмотреть их общность. Такой «алгоритмизированный» подход к понятию задачи имеет, таким образом, место не только в кибернетике, но и в педагогике. Примерно та же трактовка понятия задачи содержится и в следующем ее толковании: «задача — это предъявляемое требование достичь поставленной цели упорядоченным действием»[2]. Однако такая узкая трактовка понятия задачи в кибернетике не является общепринятой, так как наряду с решением задач, поддающихся алгоритмизации, кибернетики изучают возможность создания автоматов, «умеющих решать» и задачи нестандартного характера. Поэтому в кибернетике можно встретить как более общую, так и более широкую трактовку понятия задачи.

Пожалуй, наиболее емкой (и в то же время хорошо отражающей точку зрения кибернетиков) является характеристика понятия задачи, данная А. Ньюэллом, Дж. Шоу и Г. Саймоном, заслуживающая того, чтобы привести ее достаточно полно.

«Абстрактно говоря, человеку задана задача, если ему даны множество возможных решений и способ проверки того, является ли данный элемент этого множества действительно решением данной задачи.

---

[1] Гелернтер Г. Реализация машины, доказывающей геометрические теоремы. — В кн.: Вычислительные машины и мышление. М., 1967, с. 147.

[2] См.: Томашевский К. Задача как дидактическая категория. — В кн.: Педагогика и школа за рубежом. М., 1971, № 9, с. 46.

Причина того, почему задачи являются действительно «задачами», лежит в том, что первоначальное множество возможных решений, которое дается решающему задачу, может быть очень большим. Действительные же решения могут быть равномерно и редко распределены по этому множеству, а получение и испытание каждого нового элемента может требовать больших усилий. Таким образом, человеку, решающему задачу, фактически не «дается» множество возможных решений. Вместо этого ему сообщается некоторая процедура, позволяющая вырабатывать элементы этого множества в определенном порядке. При этом способ генерирования элементов имеет свойства, которые обычно не определяются поставленной задачей»[1].

Другая общая кибернетическая характеристика понятия задачи представлена в работах У. Р. Рейтмана. Анализируя понятие задачи с точки зрения информационных процессов, У. Р. Рейтман так характеризует это понятие: «Мы говорим, что система имеет перед собой задачу, когда она имеет или ей дано описание чего-то, но у нее еще нет чего-либо, что удовлетворяло бы этому описанию».[2]

Эта характеристика понятия задачи (если считать, что человек также может выступать в виде особой биологической системы) достаточно универсальна и в силу этого слишком обща. Согласно этой характеристике в качестве задач может выступать весьма широкий класс различных ситуаций,в которых оказывается субъект. Например:

1) У меня на руках определенная сумма денег. Как мне организовать свое питание, чтобы этой суммы денег хватило до следующей зарплаты?

2) Кого мне пригласить на свой день рождения, чтобы он прошел весело и интересно?

3) Я нашел на улице удивительный предмет. Что мне с ним делать? Нужен ли он мне[3]? И т. п.

Весьма обстоятельное исследование по анализу различных трактовок понятия задачи было проведено Г. А. Баллом[4]. Г. А. Балл отмечает, что понятие «задача» употребляется в психологической литературе для обозначения объектов трех различных категорий, а именно:

1) как категория цели действия субъекта, требования, поставленного перед субъектом;

---

[1] Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Эмпирические исследования машины «Логик-теоретик»; (пример изучения эвристики). — В кн.: Вычислительные машины и мышление. Под ред. Э. Фейгенбаума и Дж. Фельдмана. М., 1967, с. 117—118.

[2] Рейтман У. Р. Познание и мышление (Моделирование на уровне информационных процессов). М., 1968, с. 178—179.

[3] Там же, с. 187—197.

[4] См.: Балл Г. А. О психологическом содержании понятия «задача». — «Вопросы психологии», 1970, № 6, с. 75—85.

2) как категория ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута;

3) как категория словесной (знаковой) формулировки этой ситуации.

Говоря о задаче как обозначении объектов второй категории, Г. А. Балл приводит интересное замечание терминологического характера. Именно он считает, что сами объекты этой категории целесообразно называть задачами, тогда как классы объектов лучше выражать термином «проблемная ситуация». Автор достаточно убедительно мотивирует это замечание, справедливо считая, что объекты этой категории в значительной степени зависят от субъективных условий деятельности в силу того, что задача существует лишь по отношению к человеку.

Действительно, приведенная Г. А. Баллом обзорная характеристика основных трактовок понятия «задача» является, на наш взгляд, весьма полной. Нетрудно, например, усмотреть, что определение задачи, данное А. Н. Леонтьевым, примыкает к определению объектов первой из выделенных Г. А. Баллом категорий; характеристика понятия задачи, приведенная К. А. Славской, может быть соотнесена ко второй категории; характеристика задачи, данная С. Л. Рубинштейном (а при известном уточнении — А. М. Матюшкиным, Л. М. Фридманом, А. А. Столяром), представляет характеристику объектов третьей категории.

Важно отметить, что по существу Г. А. Балл рассматривает задачу как некоторую ситуацию, в которой оказывается и должен действовать субъект. При этом он выделяет и три возможных подхода к характеристике этого понятия.

1) Задача представляет собой определенную ситуацию, требующую от субъекта некоторого действия (такие задачи именуются им просто задачами);

2) задача представляет собой определенную ситуацию действия, направленного на нахождение неизвестного посредством его существующей связи с известным;

3) задача представляет собой такую ситуацию, в которой от субъекта требуется отыскать действие, направленное на установление связи неизвестного с известным, в условиях, когда субъект не владеет способом (алгоритмом) этого действия.

По утверждению Г. А. Балла, первый подход к трактовке понятия задачи характерен для исследований А. И. Леонтьева и А. Я. Пономарева; второй отражен в исследованиях Г. С. Костюка, а третий — в исследованиях А. Ньюэлла и др.

Подводя итог этим различным трактовкам понятия задачи, заметим, что с философской точки зрения проблемная ситуация — это знание о незнании; проблемная ситуация возникает в противоречие между субъектом и объектом. Таким образом, проблема может возникнуть при контакте пассивного характера объекта и субъекта. Задача предполагает побуждение к активизации такого

контакта, образовавшуюся внутри или возникшую извне потребность субъекта к устранению обнаруженного им противоречия.

С кибернетико-психологической точки зрения задача отражается в сознании субъекта в виде некоторой информационной динамической модели, в которой сочетаются ее условия и цели; физиологически образование этой модели проявляется в возникновении доминантного очага в человеческом мозге.

Выше нами приведено немало различных описаний (и даже определений) понятия задачи, выдвинутых специалистами различных отраслей науки (и прежде всего психологами, кибернетиками и дидактами). Это обилие локальных определений (или описаний) понятия задачи на первый взгляд кажется весьма разноречивым и выполненным на различных уровнях полноты и общности. Имеющиеся в литературе попытки проанализировать эти характеристики нередко приводят к ненужному противопоставлению (взаимоопровержению) различных точек зрения. Между тем детальный анализ этих исследований показывает, что указанная противоречивость, неполнота или узость имеющихся характеристик понятия задачи являются скорее кажущимися, чем реальными. Дело в том, что каждое из имеющихся в литературе определений (описаний) понятия задачи есть не что иное, как *модель* этого понятия, выполненная на различных уровнях четкости, строгости и явности, и тем не менее вполне удовлетворяющая той конкретной цели, которая ставилась тем или иным исследователем.

Если оставить в стороне многочисленные различия в деталях построения модели общего понятия задачи, присущие различным исследователям, и постараться выявить общее, то проведенный обзор различных характеристик этого понятия свидетельствует о следующем основном положении. Понятие задачи является понятием, которое отражает определенное взаимоотношение субъекта с внешним миром (объектом).

Таким образом, говоря о любой задаче, по существу мы имеем дело с системой типа «субъект — объект».

Представление о задаче как о некоторой взаимодействующей системе имеется в работе Я. А. Пономарева «Психология творческого мышления», который характеризует задачу следующим образом: «Используя принцип взаимодействия, при условии полной абстракции от всякого конкретного содержания и той реальности, о которой идет речь, мы можем *определить задачу* (подчеркнуто мною. — *Ю. К.*) как состояние возмущения взаимодействующей системы (как состояние ее неуравновешенности). Решение задач при таком исходном определении будет соответствовать ходу уравновешивания взаимодействующей системы; нерешение — ее разрушению»[1].

Однако, рассматривая задачу как взаимодействующую систему, Я. А. Пономарев исследует ее под углом зрения деятельности че-

[1] Пономарев Я. А. Психология творческого мышления. М., 1960, с. 109.

ловека в процессе решения, т. е. в чисто психологическом аспекте. «Здесь, — пишет Я. А. Пономарев, — мы не стремимся дать классификацию задач. Наша цель — определить аспект рассмотрения задачи, специфичный при исследовании мышления»[1]. Поэтому многие характерные черты этой системы, в частности характеристика самой ситуации, входящей в систему, и характеристика взаимодействия задачи и решающего ее субъекта, остаются за рамками его исследований. В самом деле, система может оказаться неуравновешенной с точки зрения одного субъекта и уравновешенной — с точки зрения другого (или того же самого субъекта при иных условиях). Один субъект сумеет усмотреть в данной системе задачу, другой (или тот же самый, при иных условиях) — не обнаружит ее. Более того, задача может быть обнаружена, но желания (а тем более потребности) ее решать у субъекта не будет. Поэтому высказывание Я. А. Пономарева о том, что нерешение задачи означает разрушение системы, следовало бы заменить другим: нерешение задачи есть оставление системы в неустойчивом состоянии.

Правильно указывая, что «ситуация как задача является, следовательно, совокупностью потребности и данных к ее удовлетворению. Эти данные слагаются из цели и условий ее достижения»[2], Я. А. Пономарев вкладывает априори существование такой «потребности» в само понятие задачи, опять-таки излишне связывая вместе субъективные и объективные характеристики этого понятия.

Представление о задаче как об особой форме взаимодействия человека и проблемной ситуации достаточно ярко отражено в работах А. В. Брушлинского, который характеризует проблемную ситуацию тем, что при взаимодействии с ней у человека «... возникают эти новые цели, а старые, прежние средства и способы деятельности недостаточны (хотя и необходимы) для их достижения»[3].

Задача, по его мнению, возникает в результате анализа проблемной ситуации (когда начинает работать мышление) и проявляется в предварительном, приближенном расчленении известного и искомого. В ходе осознания человеком задачи возникает детерминация мыслительной деятельности, благодаря которой условие и цель задачи выделяются более четко, обогащаются новыми данными, необходимыми для ее решения. Установление связей и соотношение между известным и искомым дает возможность осуществить это решение.

Интересно отметить, что такая же по существу характеристика понятия задачи имеется во многих работах, в которых это понятие исследуется с точки зрения его проявлений в деятельности экономиста, инженера, организатора производства и т. п. Ограничимся здесь только одним примером, в котором характеристика задачи дается конструктивно, через описание важнейших ее компонентов и в

[1] Пономарев Я. А. Психология творческого мышления. М., 1960, с. 112.

[2] Там же, с. 111.

[3] Брушлинский А. В. Психология мышления и кибернетика. М., 1970, с. 52.

тесной связи с процессом ее решения. «*Задача возникает всякий раз, когда нужно перейти от одного состояния к другому*... У любой задачи есть начальные условия, которые называют *состоянием А* или *входом*, а то состояние, которого нужно достичь, называют *состоянием В* или *выходом*»[1].

В качестве примеров задач автор приводит, например, такие: измерение расстояния между двумя точками в пространстве, переправа на другой берег реки, перелет с одной планеты на другую, переработка руды в металл, выздоровление больного человека и т. п. Все эти задачи, по выражению автора, представлены с помощью состояний *А* и *В*. «Большинство задач такого рода имеет огромное число решений, т. е. различных способов перехода из одного состояния в другое»[2].

Далее автор пишет: «Собственно говоря, если нет различных способов достижения требуемого результата, то нет и инженерной задачи. Точно так же если все возможные решения одинаково хороши, то инженерной задачи не существует. Инженерная задача — это нечто большее, чем нахождение одного решения; она требует нахождения предпочтительного метода достижения желаемого результата»[3].

Отметим, что системный подход к понятию задачи имеет место и в работах по кибернетике.

Утверждается, что общее понятие задачи можно рассматривать как обобщение понятия действия, в силу того что «задача в самом общем смысле — это ситуация, определяющая действия некоторой решающей системы»[4]. В качестве решающей системы могут выступать как люди, так и автоматы. Совокупность преобразуемых объектов (или отдельный объект) совместно с требованием о предпочтительном состоянии рассматривается как некоторая задачная система.

Отмечая оригинальность этой трактовки понятия задачи, укажем, что, на наш взгляд, задача здесь неправомерно отождествляется с процессом ее решения. Впрочем, учитывая специфику рассмотрения этого вопроса авторами, занимавшимися вопросами функционирования «решающих автоматических систем», такое искусственное по существу отождествление задачи и процесса ее решения для достижения поставленных ими целей небесполезно.

Для нас же самым существенным в этих исследованиях представляется явно или неявно выраженная мысль о том, что наиболее характерным признаком общего понятия задачи является наличие особого взаимодействия субъекта и объекта, ведущее к образованию некоторой системы.

---

[1] Крик Э. Введение в инженерное дело. Пер. с англ. М., 1970, с. 7.
[2] Там же, с. 7.
[3] Там же, с. 7—8.
[4] Глушков В. М., Брановицкий В. И., Довгялло А. М., Рабинович З. Л., Сточный А. А. Человек и вычислительная техника. Киев, 1971, с. 66.

Исходя из этого положения, мы и попытаемся далее построить свою модель общего понятия задачи.

Отправным пунктом нашего исследования будем считать понятие *системы*. Будем понимать под системой множество элементов вместе с совокупностью отношений между этими элементами или между их свойствами[1]. Таким образом, система представляет собой «нечто целое, абстрактное или реальное, состоящее из взаимодействующих или взаимозависимых частей. Так, в общественных науках семья представляет собой систему, в то время как группа из трех человек, читающих газеты в купе поезда, системой не является, пока они не начнут, скажем, общую беседу[2]. Естественно также, что сам человек представляет довольно сложную биологическую систему.

Будем рассматривать сложную систему $S — P$ — *человек — задачная система*, где под последней понимается некоторый объект, также представляющий систему. При определенных условиях (о которых будет сказано далее) в сложной системе $S — P$ возникает *задача*. Воспользуемся известным в общей теории систем понятием *окружающей среды* системы. «Для данной системы окружающая среда есть совокупность всех объектов, изменение свойств которых влияет на систему, а также тех объектов, чьи свойства меняются в результате поведения системы»[3]. Приняв это определение, можно усмотреть, что в системе $S — P$, определяющей некоторую задачу, сам человек выполняет определенные функции среды по отношению к той системе, в которой он является одним из основных компонентов.

В самом деле, накопление человеком знаний и опыта оказывает значительное влияние на решение задачи; в свою очередь решение каждой задачи обогащает знания и опыт самого человека.

Рассмотрим сложную систему, состоящую из субъекта (человека) и объекта — некоторого множества, состоящего из взаимосвязанных через некоторые свойства и отношения элементов, образующего задачную систему $P = (a_{f1}\, \tau_1 b_{f2}\, \tau_2 \ldots)$. Здесь символами $a$, $b$, ... обозначены элементы множества $P$; символами $f_1$, $f_2$, ... — присущие этим элементам свойства; символами $\tau_1$, $\tau_2$, ... — связывающие элементы или их свойства отношения.

Если человеку, вступившему в контакт с системой $P$, известны все элементы множества и известны все свойства элементов и отношения между ними, достаточные того, чтобы он мог считать множество $P$ системой, то такую систему $P$ будем называть *стационарной* по отношению к данному человеку.

Будем считать стационарной относительно данного человека и всякую систему $P$, с которой у него не возникло контакта.

---

[1] См.: Исследования по общей теории систем. Сб. переводов. Под ред. В. И. Садовского и Э. Г. Юдина. М., 1969, с. 252.

[2] См.: Ханика Ф. де П. Новые идеи в области управления. М., 1969, с. 23.

[3] Исследования по общей теории систем. Сб. переводов. Под ред. В. И. Садовского и Э. Г. Юдина. М., 1969, с. 258.

Если субъекту неизвестен хотя бы один элемент, одно свойство или отношение, определенные в $P$, необходимые для того, чтобы он мог считать $P$ системой, то такую систему мы назовем *проблемной* по отношению к данному субъекту и обозначим символом $P_x$.

Так, например, уравнение $478 \cdot x = 97\,034$ является проблемной системой для любого читающего эти строки.

Вообще говоря, стационарная система может существовать вне зависимости от какого-либо конкретного субъекта. Так, например, существует некоторое непознанное еще явление природы с управляющими им законами; числовое равенство $7 + 2 = 9$, являясь системой стационарной для школьников, существует независимо и по отношению к ребенку, не знающему арифметики. Фактически рассматриваемые нами стационарные системы в их отношении к субъекту являются подсистемами систем типа «стационарная система».

При осуществлении контакта человека с множеством $P$ правомерно употребление и общепринятых терминов: стационарная и проблемная ситуации.

Подчеркнем, что проблемность ситуации является понятием относительным. Так, например, ситуация, выраженная уравнением $x + 8 = 23$, является проблемной для начинающего школьника и не является таковой для любого из нас.

«Часто говорят о задаче как о чем-то, что существует во внешнем мире. Она предъявляется субъекту на листке бумаги, или он обнаруживает ее где-то в природе. Однако то, что составляет задачу для одного индивидуума, может не быть задачей для другого»[1].

При наличии каким бы то ни было образом выраженной *потребности* и *возможности* в установлении неизвестных данному человеку элементов, свойств и отношений из множества $P$, проблемный характер которого зафиксирован, последнее становится *задачей* для данного субъекта. Указанная выше потребность нередко выражается в форме специального целевого указания, связанного с множеством $P$ и указывающего одновременно на проблемность системы $P$ и на желательность или необходимость ее устранения.

Так, например, уравнение $123 + 2x = 197$ становится задачей, если оно сопровождается целевым указанием «Решить уравнение».

Таким образом, как проблемная ситуация, так и задача могут существовать только по отношению к субъекту (хотя и не обязательно по отношению к конкретному субъекту, например в форме специальных контекстов в учебном пособии).

Решить задачу — это значит преобразовать данную проблемную ситуацию в соответствующую ей стационарную ситуацию или установить, что такое преобразование в данных условиях (которые могут быть и субъективными) невозможно.

---

[1] Berlyne D. E. Structure and direction in thinking. Willey and Sons. Inc., N. I. 1965, p. 281.

Так, например, если учащийся восьмилетней школы установил, что уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней, то следует считать, что он решил эту задачу (на уровне имеющихся у него знаний).

Отметим, что задача существует независимо от того, действует ли человек в направлении ее решения или нет; необходимо лишь осознание человеком нестационарности данной системы $P$ и наличие целевого указания (или субъективной потребности) к ее преобразованию.

Естественно охарактеризовать процесс решения задачи как целенаправленную мыслительную или практическую деятельность человека, осуществляющего решение задачи.

В проблемной ситуации (равно как и в задаче) можно выделить следующие основные компоненты, отражающие определенное состояние системы $P_x$ в системе $(S, P)$.

I. *Начальное состояние* $(A)$ — характеристика проблемности системы $P$. Для математических задач это состояние выступает в форме *условия* задачи (данные элементы и связи между ними).

II. *Конечное состояние* $(B)$ — характеристика стационарности системы $P$. Для математических задач это состояние выступает в форме *заключения* или *цели* задачи (неизвестные элементы и связи между ними)[1].

III. *Решение задачи* $(R)$ — преобразование системы $P_x$ в систему $P$, т. е. один из возможных способов перехода от начального состояния ситуации к конечному. Для математических задач способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого.

IV. *Базис решения задачи* $(C)$—множество факторов, определяющих некоторое решение $R_i$, т. е. теоретическая или практическая основа для преобразования $P_x$ в $P$ посредством данного решения. Для математических задач базис решения выступает в форме *обоснования* решения.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере математической задачи:

Решить уравнение $123 + 2x = 197$.

а) *Условие задачи* (данные элементы, свойства и связи между ними) выражается тем, что неизвестно второе слагаемое, тогда как первое слагаемое и сумма (123 и 197) известны; кроме того, второе слагаемое есть произведение известного числа (2) на неизвестное число;

---

[1] Целесообразно различать начальное и конечное состояния ситуации $P_x$ в целом от начального и конечного состояний входящих в $P_x$ элементов, свойств этих элементов или отношений между ними. В частности, приведение $P_x$ к стационарному конечному состоянию означает завершение решения задачи; приведение отдельных элементов, свойств или отношений в такое состояние может означать завершение промежуточных этапов решения, завершение решения отдельных подзадач, на которые может быть «разбита» данная задача.

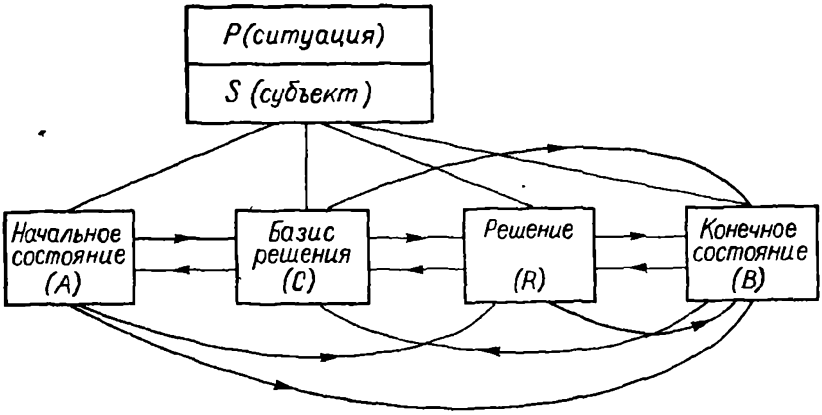



Рис. 3

б) *цель задачи* (результат решения — неизвестные элементы, свойства и связи между ними) состоит в определении такого числового значения $x$, которое обращает это условное равенство в безусловное верное числовое равенство[1];

в) *решение задачи* (способ перехода от условий к результату) состоит в следующей цепочке последовательных преобразований: $123 + 2x = 197 \Leftrightarrow 2x = 197 - 123 \Leftrightarrow 2x = 74 \Leftrightarrow x = 74 : 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = 37$;

г) *базис решения* (его теоретическая основа) — зависимость между компонентами и результатом сложения и умножения чисел (или основные свойства эквивалентности уравнений и их следствия).

Применим к исследованию введенной модели понятия «задача» метод блочного моделирования. В качестве начального этапа в применении этого метода представим основные компоненты задачи следующей блок-схемой (рис. 3).

Отметим, что каждый из этих компонентов обладает определенной автономией, хотя бы в том смысле, что допускает специальное исследование (описание или конструирование).

В символической записи совокупность этих компонентов выразим как *ACRB*.

Рассмотрим теперь (и изобразим их схематически) явно существующие связи между блоками — основными компонентами задачи. При этом не будем учитывать изображенных отрезками связей всей

[1] Вообще говоря, в условии математической задачи содержится описание как начального состояния $P_x$ в целом, так и описание начального состояния всех ее компонентов. Цель решения математической задачи (заключение, требование) чаще характеризует конечное состояние тех отдельных элементов (и свойств или отношений между ними) системы $P_x$, от которых зависит конечное состояние $P$ в целом; по существу здесь четко обозначен желаемый конкретный результат решения задачи.

системы $(S, P)$ с ними, так как эти отрезки лишь выражают иерархическое расчленение самой системы $(S, P)$ на четыре основных блока $A$, $C$, $R$ и $B$.

Прежде всего изобразим установленную взаимозависимость между узлами схемы $C$ и $R$, а также существующую (собственно определяющую саму задачу) зависимость компонентов $A$ и $B$. Отметим, что на стадии постановки задачи эта зависимость является односторонней (от $A$ к $B$) и лишь в процессе решения (и конечно, же при проверке правильности решения) получает противоположную ориентацию.

Далее отметим заведомо существующую (если задача имеет хотя бы одно решение) зависимость компонентов $A$ и $C$, а также $B$ и $C$. Причем и та и другая связь имеют двусторонний характер. Существование последовательной связи между блоками $A$, $R$ и $B$ очевидно. На уровне формально осуществленного решения задачи она является однонаправленной (от $A$ к $B$, через $R$).

Ясно, что одно и то же решение может определяться различными базисами; имеет место и обратное: один и тот же базис может определять различные решения.

Отметим, что следует отличать цель задачи (например, неизвестное число) от целевого указания (например, «найти неизвестное число» или «решить уравнение»); напомним, что цель задачи характеризует конечное состояние системы $P_x$, тогда как целевое указание является указанием на желательность (или необходимость) преобразования $P_x$ в $P$.

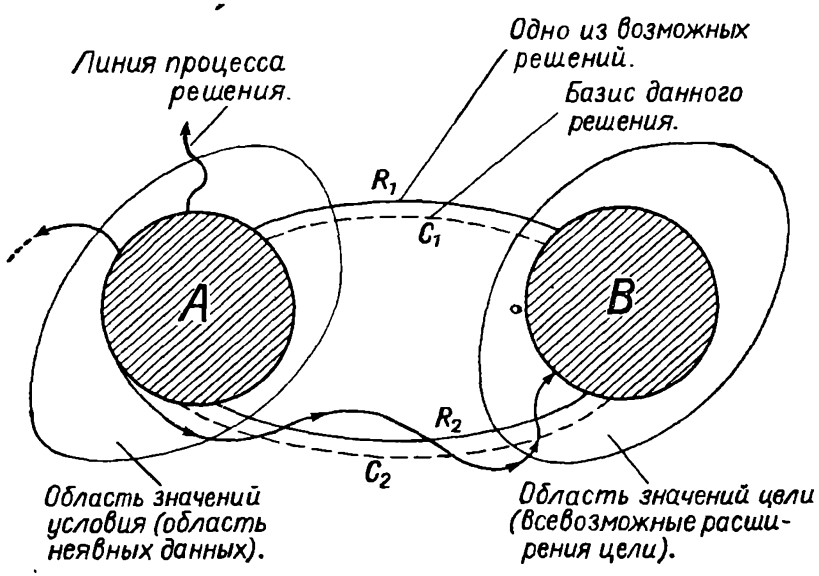



Рис. 4

Отметим также, что следует различать решение задачи (один из основных компонентов системы $P_x$, зависящей от $A$, $B$ и $C$) от процесса решения задачи (деятельности человека в направлении отыскания решения, зависящей от способностей человека, его знаний, опыта, эмоциональной настройки, условий работы и т. д.).

Среди всевозможных решений некоторой задачи $R_i$ ($i = 0, 1, 2, 3, \ldots$), по-видимому, существует некоторое решение $R_k$, которое в данных условиях является оптимально-простым. Однако оценка оптимальности данного решения весьма относительна. Дело в том, что отыскание решения зависит не только от способностей человека, решающего задачу, но и от базиса, определяющего данное решение. Однако может случиться так, что данный базис (а следовательно, и решение) может быть (и даже остаться) неизвестным человеку, решающему задачу. Поэтому, говоря о некотором решении задачи, как об оптимально-простом, мы можем дать такую оценку только в сравнении с известными нам решениями этой задачи.

Задачу и процесс ее решения можно представить следующей функциональной схемой (рис. 4).

Наличие достаточного (различного для каждого индивидуума) числа точек соприкосновения преобразований системы $P_k$, выполняемых человеком в направлении от $A$ к $B$, характеризующих процесс решения с преобразованиями $A$ и $B$, характеризующими некоторое решение, определяет выбор перехода от $A$ к $B$ посредством именно этого решения.

Отметим, что трактовка понятия задачи и ее решения, аналогичная предложенной нами, нашла свое отражение в уже упомянутой нами монографии «Человек и вычислительная техника». В разделе книги «Определение понятия задачи. Процесс решения задачи», написанном Г. А. Баллом, задача определяется как задачная система, рассматриваемая в ее отношении к решающей системе (существующей или потенциальной). Так как в этом определении выражена возможность рассматривать задачную систему как управляемый объект, решающую систему — как управляющее устройство, а процесс решения задачи — как процесс управления, то Г. А. Балл называет это описание общего понятия задачи кибернетическим[1].

Если сопоставить выделенные нами основные компоненты задачи: начальное состояние, конечное состояние, решение, базис решения — с теми, что имеются у Г. А. Балла, здесь налицо аналогия. В приведенной Г. А. Баллом упрощенной модели задачи (рис. 5) различаются: предмет действия, требование — основные компоненты задачной системы; способы решения задач, средства решения задач — основные компоненты решающей системы.

---

[1] См.: Глушков В. М. и др. Человек и вычислительная техника. Киев, 1971, с. 65—73.

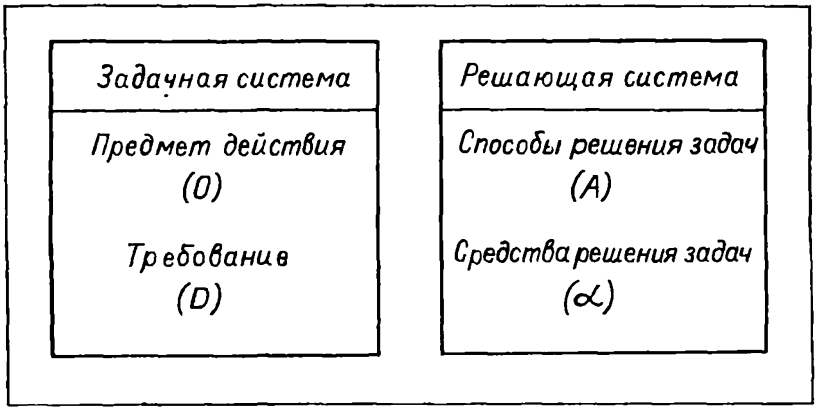



Рис. 5

Правда, в отличие от трактовки, принятой нами, в числе средств решения задачи (α) автором упоминаются такие объекты, как числа, фигуры, операции (например, умножение). В нашей трактовке такие объекты, как фигуры и числа, являются элементами предмета действия (ситуации $P_x$), а операции (например, умножение), как правило, представляют собой элементы решения задачи (по Г. А. Баллу, способа решения задачи). Под средствами решения задачи Г. А. Баллом понимаются теоретические или опытные основы, определяющие тот или иной способ решения задачи (в нашей терминологии — базис решения задачи).

Сказанное не следует понимать как критику той терминологии, которая принята Г. А. Баллом. Его исследования, связанные с общим понятием задачи, предназначены для того, чтобы служить «главным образом основой для систематизированного изложения материала по проблеме «человек — вычислительная техника», тогда как представляемое здесь исследование предназначено главным образом для систематизации вопросов, относящихся к решению задач в ходе школьного обучения математике. Каждому исследованию присуща своя специфика, которая, в частности, находит свое отражение в различных терминологии и трактовке одних и тех же понятий. Вместе с тем близкая аналогия идей исследований, проведенных нами и Г. А. Баллом, независимо друг от друга взаимно повышает «коэффициент надежности» полученных результатов[1].

Кроме того, лишний раз получает подтверждение ранее высказанная мысль о том, что методике математики есть что позаимствовать в исследованиях по кибернетике. Не исключается полезность и обратного положения.

[1] Первая наша публикация по этому вопросу датируется 1970 г. (Ю. М. Колягин. Системный подход к общему понятию задачи и типологии задач. — «Ученые записки МОПИ им. Н. К. Крупской», 1970, т. 269, математический анализ, вып. 14, с. 293).

# О КЛАССИФИКАЦИИ ЗАДАЧ

Проблеме классификации и систематизации математических задач, рассматриваемых в школьном обучении, посвящено немало работ. Первые работы в этом направлении датируются второй половиной прошлого века[1]. Характерная для русской дореволюционной школы типизация математических задач (в первую очередь, конечно, арифметических задач) была признана нецелесообразной подавляющим большинством методистов раннего периода развития советской школы.

Вплоть до 1939 г. для школьных учебников и задачников математики было характерно большое разнообразие представленных там задач, направленных на реализацию цели — научить школьников решать любые (естественно-учебные) задачи, связанные с курсом математики. Но в практике массового обучения этой цели добиться не удалось, и потому возникла и закрепилась противоположная точка зрения (работы Н. С. Поповой, А. С. Пчелко и др.), согласно которой в школьном обучении математике следует представить задачи определенных типов, обучение решению которых является одной из целей школьного обучения математике вообще[2]. И хотя отдельные методисты ратовали за параллельное рассмотрение как типовых, так и нетиповых задач[3], в практике школьного обучения закрепилась тенденция к обучению школьников решению строго определенных типов математических задач (особенно сильная на начальной стадии обучения).

Однако обучение школьников решению типовых задач не давало нужных результатов. По мере перехода школьников от младшей ступени обучения к старшей изученные ими ранее типы задач встречались все реже и реже, пока не исчезали из школьного обучения совсем и формированные ранее навыки оказывались бесполезными.

В 60-х годах нашего столетия интерес к такого рода исследованиям резко снизился. Это произошло в тот период времени, когда всемерное движение за реформу математического образования вступило в решающую фазу, когда цели обучения математике подвергались решительному пересмотру, когда полезность обучения школьников решать задачи определенных типов (особенно при обучении арифметике) была поставлена под сомнение. По мере обновления содержания обучения математике выяснилось, что не столько важно (если не сказать вообще не нужно) обучать школьников решать математические задачи определенных типов, сколько необходимо

---

[1] См., например: Конашевич Е. Д. О методах решения арифметических задач. — Педагогический сборник, май 1886—август. Спб., 1886, с. 438—459.

[2] См.: Астряб А. М. О принципах систематизации арифметических задач. — «Начальная школа», 1939, № 5, с. 41—48.

[3] Там же.

обучать их общим методам решения различных по своему содержанию и форме задач.

Тем самым проблема классификации математических задач школьного курса приобрела значение разве лишь для авторов учебников, методистов и отчасти учителей математики, но отнюдь не для самих учащихся.

Следует отметить, что весь прошлый опыт школьного обучения математике также свидетельствовал о необходимости такого смещения акцента в исследованиях по классификации математических задач. Многие весьма серьезные методические работы в этом направлении, такие, например, как работы И. И. Александрова[1], В. М. Брадиса[2], И. В. Арнольда[3], Г. Китцеля[4] и др. не принесли ощутимой пользы даже в практике традиционного обучения математике. На наш взгляд, многочисленные попытки классифицировать математические задачи, предпринятые в традиционной методике, не прижились прежде всего потому, что не стали рабочим инструментом в руках авторов учебных пособий, учителей и учащихся.

Большинство из этих попыток в качестве основной цели имели обеспечение наиболее быстрого и наиболее легкого решения задач определенных типов и разучивание с учащимися определенных способов решения задач этих типов. Не говоря уже о том, что стремление всячески облегчить математическую деятельность учащихся в процессе обучения было и остается педагогически нецелесообразным, эта тенденция в методике обучения математике способствовала формированию у многих учителей и учащихся неверного убеждения, что основной целью работы над учебной задачей является наиболее быстрое и легкое ее решение.

На смену попыткам расклассифицировать школьные математические задачи с точки зрения более успешного (и более легкого для учащихся) обучения их решению пришли попытки создать типологию задач, направленную на выявление самых основных типов задач, характерных для школьного курса математики, и разработку общих методов их решения. В этих исследованиях, правомерно адресованных уже не учителю (и через него учащимся), а методисту (и через него учителю), анализировались само понятие задачи, логическая структура задач, основные методы решения задач школьного курса математики и намечались пути конкретной методики постановки задач в обучении математике. К числу такого рода исследований относятся исследования Л. М. Фридмана, Я. Вишина, И. Ганчева, А. А. Столяра и др.

---

[1] См.: Александров И. И. Методы решения арифметических задач. М., 1953.

[2] См.: Брадис В. М. Методика преподавания математики. М., 1949.

[3] См.: Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. — «Известия АПН РСФСР». М., 1946, вып. 6.

[4] См.: Chitel G. H. Metode pentru resolvarea problemelor de Aritmetica. Bucuresti, 1958.

Л. М. Фридман указывает на следующие наиболее распространенные типы задач[1]:

а) задачи, решаемые составлением уравнения, системы уравнений (или неравенств);

б) задачи на доказательство;

в) задачи на тождественные преобразования (на построение).

Приведенные им типы задач и их структурные логические модели действительно охватывают основные типы задач школьного курса математики, соответствующего традиционной программе. Однако в современных учебниках математики можно найти немало задач, не укладывающихся в ту типологию, которая приведена Л. М. Фридманом.

Внутри каждого из названных типов задач Л. М. Фридман выделяет задачи-проблемы — задачи, метод решения которых неизвестен учащимся, и задачи-упражнения — задачи, метод решения которых известен учащимся.

И. Ганчев, отмечает три основных типа задач, основываясь на характеристике объектов и соотношений области решения задачи $M$, а также условия, с помощью которых задаются элементы множества $R \subset M$: на вычисление, построение и доказательство[2] (утверждение бесспорное для традиционного обучения математике). Кроме того, И. Ганчев в зависимости от характеристики связей между задачами-компонентами, образующими решение данной задачи, выделяет четыре основных типа задач[3].

Логическая схема решения этих задач состоит из линейной или разветвленной последовательности импликаций, с помощью которых устанавливается истинность некоторой импликации $p \Rightarrow q$, обусловленной условием и заключением задачи[4].

Как и И. Ганчев, Я. Вишин в уже отмеченной работе[5] сделал весьма интересную попытку выявить общие методы (и разработать единую методику) решения задач, наиболее важных для традиционного обучения типов задач (на доказательство, задачи существования, словесные, конструктивные задачи и т. п.).

Заметим, что работам И. Ганчева (дающего свою типологию задач) и Я. Вишина (не дающего таковой) присущ методический акцент. Поэтому, несмотря на традиционную направленность (в смысле типологии школьных математических задач), в них содержится

---

[1] См.: Фридман Л. М. Психологический анализ задач. Сообщение II. Составные части и структура задач. — В кн.: Новые исследования в психологии и возрастной физиологии. М., 1970, № 2, с. 20—22.

[2] См.: Ганчев И. За математическите задачи. София, «Народна просвета», 1971, с. 20—21.

[3] Там же, с 21.

[4] См.: Ганчев И. Описание решений некоторых задач на языке математической логики. — В кн.: Роль и место задач в обучении математике. Под ред. Ю. М. Колягина. М., 1973, с. 103.

[5] Вишин Я. Методика за решаване на математически задачи. София, «Народна просвета», 1965.

немало полезных методических находок, которые могут быть с успехом использованы в современном школьном обучении математике.

Говоря о типологии учебных математических задач, А. А. Столяр отличает прежде всего типовые задачи (задачи, для которых имеются разрешающие их алгоритмы) от нетиповых (для решения которых таких алгоритмов нет или они неизвестны)[1]. На наш взгляд, А. А. Столяр правильно отмечает, что в школе следует обучать решению тех и других задач, и дает свой перечень типовых задач, распределенных по следующим разделам: 1) задачи, решаемые арифметическими средствами; 2) задачи, решаемые геометрическими средствами; 3) задачи, решаемые средствами алгебры и анализа.

Не возражая против этой идеи по существу, заметим, что такое подразделение типовых задач представляется нам неправомерным. В самом деле, указанные А. А. Столяром задачи на построение методом геометрических мест (раздел второй) являются также и задачами на конструирование различных множеств (в том числе и точечных); к ним относятся, в частности, и задачи на построение графиков функций, решение которых может быть проведено без применения геометрических средств. Если рассмотреть задачи на нахождение части числа, то некоторые из них могут решаться, например, на диаграмме, т. е. геометрическими средствами (или алгебраически — решением уравнения) и т. п.

Кроме того, в типологии стандартных задач, предложенной А. А. Столяром, остается нераскрытым ее смысл, в силу того что содержание терминов «арифметические», «геометрические» и «алгебраические» средства остается нераскрытым.

Более целесообразным был бы простой перечень алгоритмов, которыми должен овладеть каждый школьник, независимо от того, в какой форме эти алгоритмы представлены (например, алгоритмы процентных вычислений, алгоритм решения квадратного уравнения и т. п.).

Каковы бы ни были недостатки той или иной типологии школьных математических задач каждая из них по-своему интересна, так как акцентирует внимание на той или иной стороне этого вопроса. Поэтому совершенно верно высказывание, что разнообразие точек зрения на типологию задач не отрицает ее полезности[2].

Поэтому представляется целесообразным подойти к типологии школьных математических задач и с позиций изложенной выше общей характеристики понятия задачи и ее основных компонентов.

Исходя из принятой нами характеристики проблемной ситуации (и задачи) по основным ее компонентам $A$, $B$, $R$ и $C$, естественно

---

[1] Столяр А. А. Педагогика математики (курс лекций). Минск, 1974, с. 183—184.

[2] См.: Лернер И. Я. Построение исследования познавательных задач в гуманитарных дисциплинах. — В ки.: Новые исследования в педагогических науках. Вып. XIII. М., 1969, с. 31.

приходим к типологии задач в зависимости от числа компонентов, являющихся неизвестными и придающими ситуации проблемный характер.

Будем обозначать неизвестные компоненты ситуаций буквами $X, Y, Z, \ldots$, сохраняя прежние обозначения $A, B, R, C$ для известных компонентов.

Отправляясь от стационарной ситуации $ACRB$, можно выделить следующие типы задач (проблемных ситуаций):

I тип — неизвестен *один* компонент:

а) $XCRB$; б) $AXRB$; в) $ACXB$; г) $ACRX$.

II тип — неизвестны *два* компонента:

а) $AXYB$; б) $XCRY$; в) $XYRB$; г) $ACXY$; д) $AXRY$; е) $XCYB$.

III тип — неизвестны *три* компонента:

а) $XYZB$; б) $AXYZ$; в) $XCYZ$; г) $XYRZ$.

Проанализируем и проиллюстрируем эту типологию (для иллюстрации отдадим предпочтение математическим задачам, хотя не представило бы особого труда привести примеры задач каждого типа нематематического характера).

Начнем с рассмотрения самой стационарной ситуации $ACRB$, которая в учебном процессе часто выступает в форме задачи. В самом деле, любое воспроизведение наизусть, например, таблицы умножения или воспроизведение учащимися формулировки и доказательства известной им теоремы являются примерами такого рода «задач». В соответствии с их целевым назначением «задачи» такого типа назовем *тренировочными упражнениями*.

Задачи первого типа составляют основное содержание практического материала в школьных учебниках математики. В самом деле, любая задача из школьного учебника геометрии (в котором, как известно, задачи расположены по разделам теории) является задачей этого типа, именно $ACXB$.

Задачи вида «Решить уравнение $x^2 - 7x + 12 = 0$» или «Вычислить произведение $27 \cdot 135$» также можно отнести к задачам этого типа, именно $ACRX$. Поэтому задачи *первого* типа можно называть *обучающими задачами*[1].

Задачи *второго* типа чаще всего встречаются на математических олимпиадах. Как правило, этот тип задач представлен формой $AXYB$ (четко определено условие, четко определена цель задачи; неизвестно не только решение, но и тот раздел теории — базис, на котором может быть основано это решение). Такова, например, типичная олимпиадная задача: «Доказать, что 10 произвольных точек плоскости можно разбить на два таких множества, что никакой прямой нельзя будет отделить одно множество точек от другого».

Представляется целесообразным назвать задачи второго типа *поисковыми* задачами.

---

[1] Напомним, что принадлежность задачи к тому или иному типу во многом зависит от субъекта, которому она предъявлена.

Задачи *третьего* типа чрезвычайно редко встречаются в процессе обучения (в частности, обучения математике), но зато весьма часто встречаются человеку в процессе его производственной деятельности и быту. С такого типа задачами человек имеет дело, например, в том случае, если перед ним четко определена некоторая цель и только цель; комплекс необходимых условий, путей и средств, достаточных для достижения этой цели, человек устанавливает самостоятельно. Такие задачи могут быть выражены формой ***XYZB***. Правда, нетрудно сформулировать и учебное задание так, чтобы оно стало задачей этого типа. Ограничимся здесь одним примером. Так, введя определение ромба, как особого параллелограмма, учащимся можно предложить следующую задачу: «Изучить свойства ромба» (или «Изучить ромб!»). Здесь налицо целевое задание «изучить», известен компонент $A$ — ромб, охарактеризованный определением; однако ни конкретная цель задачи, ни решение, ни обоснование его неизвестны. Такие задачи могут быть выражены формой ***AXYZ***. Именно задачи этого типа целесообразно назвать *проблемными*.

Наконец, возникает вопрос о существовании четвертого типа задач — задач типа ***XYZU***. В такого типа задачах (если они существуют) остаются определенными (известными) лишь целевое указание и, может быть, общее описание некоторой ситуации, ни один из четырех названных компонентов которой неизвестен (или почти не определен). Вероятно, такого типа задачи все же имеют место в творческой деятельности ученого, исследующего некоторое непознанное явление природы. В процессе этой деятельности ученый-исследователь, по-видимому, начинает с формулирования (часто гипотетического) той или иной проблемы, связанной с объектом исследования или условиями его существования, т. е. переходит к задаче третьего типа, и т. д.

Таким образом, рассмотренную выше типологию задач в грубом приближении можно рассматривать и как схему последовательных этапов творческой деятельности (начиная с четвертого до первого).

В методике математики бытует эмпирически возникший (и также эмпирически применяющийся) термин «задачи повышенной трудности», которым обозначают все задачи, не являющиеся стандартными. Вряд ли уместно использовать этот термин в дальнейшем, так как «трудность» каждой задачи является весьма субъективным понятием. Нам представляется более оправданным введенное выше терминологическое разделение задач на *стандартные*, *обучающие*, *поисковые* и *проблемные*. Любую задачу школьного курса будем называть *учебной*[1].

---

[1] См., например, типологию проблемных ситуаций, данную в работе: Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972, с. 37.

Предложенная типология задач (по числу основных компонентов), не является единственно возможной; вместе с тем рассмотрение этой типологии при изучении роли и места задач в школьном обучении математике представляется небесполезным.

Как уже было отмечено, в традиционном обучении математике находят свое место лишь стандартные задачи (тренировочные упражнения и задачи вида $ACRX$). Таким образом, даже те задачи, которые мы назвали обучающими, представлены в традиционном обучении только одним видом — $ACXB$ (не говоря уже о задачах второго и третьего типов).

Следует особо подчеркнуть, что многие задачи тех типов, которые не представлены в школьном обучении, можно встретить в различной учебной литературе (обычно в литературе, предназначенной для внеклассных занятий); главное же заключается в том, что их нетрудно составить самому учителю (часто путем простого переформулирования условий известной задачи).

Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами.

1) Вид $AXRB$ — математический софизм (предположительно для учащихся VI класса).

Докажем, что всякое число вдвое больше самого себя (?), т. е. докажем, что $a = 2a$.

Проведем доказательство так: $a^2 - a^2 = (a - a) \cdot (a + a)$, с другой стороны: $a^2 - a^2 = a \cdot (a - a)$. Сравнивая, получим: $a(a - a) = (a - a)(a + a)$, откуда $a = a + a$, или $a = 2a$. Найти ошибку.

2) Вид $AXRY$ (для учащихся IV класса).

Рассмотрим натуральное число 6, называемое составным, и выявим все различные делители этого числа {1; 2; 3; 6}.

Рассмотрим натуральное число 7, называемое простым, и выявим все различные делители этого числа {1; 7}.

Рассмотрим натуральное число 1 и выявим все различные делители этого числа {1}.

Какой вывод можно сделать на основе проведенного исследования?

3) Вид $XCRB$ (для учащихся VI класса).

Сколько и каких элементов однозначно определяют возможность построения треугольника циркулем и линейкой?

4) Вид $AXYB$[1].

Построить многоугольник по данным серединам его сторон.

5) Вид $AXYZ$ (для учащихся IX—X классов).

Пусть дана числовая последовательность, определяемая равенством $a_n = (a_1 + d) \cdot q$, где $d = \text{const}$, $q = \text{const}$, $n$ — натуральное число. Изучить эту последовательность.

6) Вид $ACXY$ (для учащихся VIII класса).

Построением, указанным на рисунке (рис. 6), можно преобразовать треугольник $ABC$ в равновеликий ему параллелограмм $AMNC$.

[1] Отметим, что здесь цель (B) не определена достаточно четко.

Установить, в какие другие равновеликие ему фигуры можно преобразовать треугольник и как это сделать.

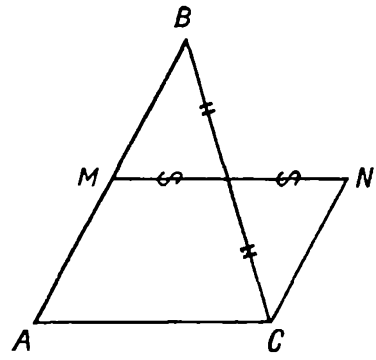


Рис. 6

Таким образом, если рассматривать задачи школьного курса математики с точки зрения данной типологии, то естественно возникает мысль о возможности и целесообразности рассмотрения в школьном обучении новых для него видов задач, в зависимости от того, сколько и какие основные характеристики задачи могут представляться неизвестными школьнику данного года обучения.

Немаловажной представляется и возможность составлять новые нестандартные задачи, руководствуясь различными вариантами схемы. Более того, представленная типология дает возможность, изменив формулировку почти любой традиционной школьной задачи, получать задачу нового типа.

Так, например, традиционная задача «Найти сумму чисел. 24 и 48» (задача первого типа), представленная в другой формулировке «Как связаны между собой числа 24, 48 и 72», становится проблемной задачей (задачей третьего типа). В такой формулировке эта задача соответствует виду $AXYZ$ и допускает различные варианты выбора цели, решения и его базиса ($24 + 48 = 72$; $48 - 24 = 72 - 48$ и т. д.).

Понятно, что эта задача, предложенная школьникам, сразу во второй ее формулировке будет для них достаточно необычной и трудной; если же она будет поставлена сразу после решения задачи, представленной в первой формулировке, то окажется для учащихся обычной учебной задачей с единственным (по их мнению) решением: $24 + 48 = 72$. Поэтому, говоря о данной типологии задач, следует иметь в виду следующее.

Каждая задача рассматривается в системе «Человек — задачная система» и тем самым соотнесение задачи к тому или иному типу во многом зависит от индивидуальных качеств человека, решающего задачу (от его знаний, способностей, прошлого опыта и т. п.).

Для некоторого индивидуума данная задача вообще может не быть задачей по существу (она для него может быть лишь тренировочным упражнением); для другого или того же человека (но в других условиях, например на различных ступенях обучения) эта же задача может выступать как поисковая и даже как проблемная задача.

Такая динамичность данной типологии отражает комплексный характер обучения, и это главное ее дидактическое достоинство.

Применение данной типологии позволяет использовать ограниченный набор задач (и даже одну и ту же задачу) в различных педагогическом и психологическом аспектах (в частности, на различных ступенях обучения).

На основе предложенной типологии задач представляется возможной и полезной ее детализация, в ходе которой наряду с числом неизвестных компонентов учитывалось бы и качество их задания. В рамках подобной типологии могли бы найти свое место многие другие виды задач, встречающиеся (правда, весьма редко) в школьном обучении математике. Например, задачи «с недостатком или избытком данных» (в частности, так называемые «задачи на построение с недоступным расстоянием») и т. п.

Отметим, что подобным задачам придается большое значение не только в дидактическом, но и в практическом плане. Существует даже типология задач в зависимости от того, определяется ли их решение однозначно или неоднозначно через условие[1].

а) Задачи, результат решения которых однозначно определен исходными данными. Таково, например, большинство школьных математических задач. Такими могут также быть некоторые задачи конструирования.

б) Задачи, результат решения которых определяется исходными данными неоднозначно. Это «задачи с избытком данных», сюда же можно отнести большинство задач планирования.

в) Задачи, однозначный результат решения которых не определяется совсем или определяется в зависимости от дополнительных данных. Это «задачи с недостатком данных», а также и математические игры.

Попытка учесть качественные различия компонентов задачи была предпринята У. Р. Рейтманом в его работе, посвященной общей теории эвристического программирования[2]. Пытаясь промоделировать умственную деятельность человека, решающего нестандартную для него задачу, У. Р. Рейтман естественно столкнулся с необходимостью выявить типичные задачные ситуации, качественное отличие которых друг от друга приводило к проявлению различных «механизмов мышления» со стороны решающего задачи человека.

В результате своих исследований У. Р. Рейтман пришел к необходимости различать задачи на «хорошо и плохо определенные», распределив все нестандартные задачи, с которыми приходится сталкиваться человеку в процессе его производственной деятельности и в быту по пяти основным типам.

Важно отметить, что типология задач, представленная У. Р. Рейтманом, находит свое место в типологии, предложенной нами. Именно

---

[1] См.: Братко А. А. Моделирование психики. М., 1969, с. 81.

[2] См.: Рейтман У. Р. Познание и мышление (Моделирование на уроке информационных процессов). М., 1968, с. 205.

типы задач, выделенные У. Р. Рейтманом в последовательном порядке (от первого к пятому), могут быть представлены в следующих обозначениях соответственно: $AXYB$, $XCYZ$, $ACYZ$, $AXRY$, $XYZB$.

Некоторое затруднение вызывает соотнесение задач IV типа к виду $AXRY$, задачи этого типа мало отличаются от задач первого (по У. Р. Рейтману) типа. Их особенность можно усмотреть разве лишь в том, что формулируемые в их условиях требования в некоторой степени определяют способ решения.

Важно также отметить следующее обстоятельство. У. Р. Рейтман, предлагая свою типологию задач, имел в виду представить основные типы задач, с которыми человеку приходится иметь дело. По нашей типологии, среди этих типов задач представлены только задачи второго (три) и третьего (две) типов, т. е. как раз те типы задач, которые почти не представлены в школьном обучении математике. Следует также отметить, что в типологии У. Р. Рейтмана представлены далеко не все виды задач второго и третьего типов, из выделенных в нашем исследовании.

Таким образом, типология задач, учитывающая качественную сторону системы «человек — задачная система», функционально связана с типологией задач по числу основных компонентов. Каждый из выделенных У. Р. Рейтманом типов задач находит свое место в предложенной нами типологии задач, представляя лишь небольшую ее часть (типы задач, рассмотренные У. Р. Рейтманом, являются подтипами в нашем рассмотрении).

Понятно, что акцент на качество задания того или иного компонента задачи сделал бы нашу типологию теоретически более содержательной. Однако в дидактическом плане делать это вряд ли целесообразно.

По существу в учебных ситуациях тот или иной из основных компонентов задачи не является для школьника полностью неизвестным, более точным было бы говорить, что этот компонент задачи слишком плохо для него определен.

Как уже отмечалось, общее определение понятия задачи, равно как и данная типология задач, естественно распространяется на математические задачи (о чем, в частности, свидетельствуют и приводимые иллюстративные примеры). Вместе с тем математическим задачам присущи и некоторые специфические особенности, проявляющиеся как в содержании, так и в форме выражения того или иного компонента.

С общей точки зрения математический характер проблемной ситуации (а значит, и задачи) вполне определяется математическим характером компонентов $C$ и $R$, т. е. математическим характером перехода от начального состояния задачной системы ($A$) к конечному ее состоянию ($B$).

Наличие явных математических признаков в характеристиках $A$ и $B$, на наш взгляд, не имеет существенного значения. Сказанное

естественно не относится к случаю, когда создается математическая модель системы $P_x$ в целом, т. е. когда даже нематематические компоненты $A$ и $B$ «переведены» на язык математики.

Вместе с тем существуют также нематематические задачи, постановка и решение которых требуют от человека (в частности, от учащихся) использования приемов умственной деятельности, присущей мышлению, называемому математическим. Так, например, задачи из серии «Психологический практикум», публикуемые на страницах журнала «Наука и жизнь», содействуют развитию наблюдательности, способности усматривать закономерности и т. п. Поэтому представляется целесообразным назвать такие задачи учебными задачами математического типа или условно-математическими, а их фрагментное использование в обучении считать полезным.

Если математические задачи определяются математическим характером решения и его базиса, то условно-математические задачи определяются математическим характером самого процесса решения, что имеет немаловажное значение для реализации целей развития и воспитания.

С понятием задачи тесно связаны понятия сложности и трудности задач. Понятия простоты и сложности являются весьма общими и весьма важными понятиями, с которыми приходится иметь дело не только в науке, но и в технике, в производстве, в быту и т. п. Естественно, что в последнее время эти понятия стали объектом рассмотрения философии.

Интересные идеи о качественной и количественной оценке сложности знания были высказаны А. И. Уемовым, предложившим для определения сложности знания подсчитывать число элементарных соотношений, на которые могут быть разбиты существующие в некоторой ситуации соотношения между вещами и их предикатами[1].

С точки зрения системного подхода «сложность системы зависит от качественных и количественных различий составляющих ее элементов, свойств, связей и отношений.

Совокупность качественных различий — это качественное разнообразие систем, а совокупность количественных различий — их количественное разнообразие. В целом они образуют разнообразие системы».

Для сравнительно простых систем понятия разнообразия и сложности могут быть отождествлены. Однако «в общем случае сложность систем является не только функцией разнообразия, но и функцией (нелинейной) числа элементов и подсистем»[2].

---

[1] См.: Уемов А. И. Проблема построения общей теории упрощения научного знания. — В кн.: Логика и методология науки. М., 1967, с. 83.

[2] Тюхтин В. С. Отражение, системы, кибериетика. М., 1972, с. 27.

В. С. Тюхтин указывает, что сложность системы может определяться составом системы (т. е. ее дискретными компонентами), свойствами системы в целом, характером связей и соотношений системы, степенью организованности системы[1].

Как мы увидим далее, в приведенных высказываниях философов в существенной мере отражены конкретные проявления этих понятий в дидактике и психологии. И хотя проблема оценки сложности и трудности еще далека от разрешения даже в общем плане, практика школьного обучения требует по крайней мере серьезного обсуждения ее дидактических аспектов.

Могли бы оказаться весьма полезными приближенные, но более или менее объективные критерии оценки сложности и трудности предлагаемых школьникам задач для того, чтобы расположить задачи в учебниках в порядке возрастания их сложности, подбирать равноценные варианты при составлении задач для контрольных работ и экзаменационных билетов, определить последовательность в методике обучения решению задач и обучения математике через задачи.

Большинство исследователей, занимающихся разработкой этой проблемы в психолого-педагогическом аспекте, отмечают отсутствие дидактической классификации задач, построенной на объективной основе и позволяющей расположить задачи в порядке возрастания их сложности и трудности для учащихся[2]. Об актуальности этой проблемы свидетельствует обзорный доклад С. Крыговской, сделанный ею по поручению Международной комиссии по математическому образованию[3]. В последнее время этот вопрос стал предметом пристального внимания многих психологов, педагогов и методистов.

В ходе уже проведенных исследований были получены интересные результаты: выявились различные подходы к проблеме, различные трактовки относящихся к ней понятий; возникли различные содержательные модели понятий сложности и трудности задач по математике.

Так, на II Всесоюзном съезде психологов было указано, что сложность задачи определяется следующими двумя основными характеристиками:

а) в какой форме выражено в условии требование использовать известные знания (прямой, косвенной, или это требование вовсе отсутствует, т. е. решающий должен привлечь знания по собственной инициативе);

---

[1] Там же, с. 28.

[2] См.: Сохор А. М. Логическая структура учебного материала. М., 1974, с. 126.

[3] См.: Крыговская С. Развитие математической деятельности учащихся и роль задач в этом развитии. — «Математика в школе», 1966, № 6.

б) насколько явно в задаче выражено общее (понятие, принцип, закон), на основе которого осуществляется перенос на конкретные случаи[1].

Если использовать введенную нами терминологию, то речь идет о том, насколько четко определены условие и цель задачи и насколько известен учащимся базис решения данной математической задачи.

В. Оконь связывает понятие сложности задачи с необходимостью ее расчленения решающим на более простые подзадачи, а трудность задачи — с необходимостью для решающего актуализировать определенную часть имеющего опыта и одновременно изобрести нечто новое (идею, метод, способ), позволяющий данную задачу решить[2].

Для некоторых исследований характерна оценка трудности задачи в зависимости от ее сложности. Так, К. С. Богушевский пишет: «Сложная задача та, которая требует для решения разбиения на ряд простых задач, решаемых непосредственно; трудная задача — сложная задача, процесс разбиения которой на простые неочевиден»[3].

В работе И. Ганчева читаем: «Имея в виду, что решение $A_n$ одной задачи содержит решения $A_1$, $A_2$, ..., $A_i$, ..., $A_{n-1}$ других задач, аксиомы и определения, целесообразно назвать число $n$ степенью сложности решения $A_n$.

Так как решение задачи зависит от выбора и порядка $A_1$, $A_2$, ..., $A_i$, ..., $A_{n-1}$, то процесс решения задачи с решением $A_n$ для отдельного человека был бы тем легче, чем больше $A_i$ ($i = 1, 2, 3, ..., n - 1$) ему были бы известны и чем меньше времени прошло от того момента, когда он имел дело с этими решениями. Следовательно, трудность решения $A_n$ каждой задачи можно уменьшать за счет увеличения числа предварительно решенных задач-компонент»[4].

Правомерно, отличая сложность решения задачи (как некое объективное свойство, присущее задаче) от трудности (в которой отражены отношения человека решающего задачу и самой задачи), А. А. Столяр тем не менее стоит на позициях, аналогичных позиции И. Ганчева, говоря о том, что «Трудность данной задачи (для данных учащихся) равна сложности этой задачи без сложности ранее уже решенных (этими учащимися) задач-компонент»[5].

---

[1] См.: Костюк Г. С., Менчинская Н. А., Смирнов А. А. Актуальные задачи школы и проблемы психологии обучения. — «Вопросы психологии», 1963, № 5.

[2] См.: Оконь В. Основы проблемного обучения. М., 1968, с. 55.

[3] Богушевский К. С. Вопросы преподавания геометрии в восьмилетней школе. М., 1968, с. 69—70.

[4] Иван Ганчев Донев. Описание решений некоторых задач на языке математической логики. — В кн.: Роль и место задач в обучении математике. Вып. 1. М., 1973, с. 109.

[5] Столяр А. А. Педагогика математики. Минск, 1974, с. 177.

Можно было бы согласиться с этими положениями, если бы все школьные математические задачи допускали алгоритмическое решение или если бы в обучении математике полезно было бы решать только такие задачи. Однако, как уже было отмечено, такая точка зрения на школьные задачи была характерной для традиционного обучения математике и не является характерной для современного обучения.

В психолого-педагогической литературе[1] можно найти и другие попытки охарактеризовать понятие сложности и трудности задачи.

А. М. Сохор, анализируя природу трудностей, возникающих при решении задачи, разделяет их на два основных вида: а) трудности, связанные с незнанием конкретного теоретического материала или неумением его применить; б) трудности, связанные с неумением осуществлять необходимую в процессе решения задачи аналитико-синтетическую деятельность. По существу речь идет о трудностях, связанных с базисом решения задачи, и трудностях, связанных с преобразованием $P_x$ в $P$. А. М. Сохор считает, что и та и другая трудности обусловлены структурой задачи, под которой он понимает «характер внутренних связей (зависимостей) между данными и искомыми величинами»[2]. Указывая на тесную связь решения задачи и его структуры, А. М. Сохор предлагает использовать для описания структуры граф-схемы, с помощью которых характеризуется, по его мнению, трудность той или иной задачи. В понимании А. М. Сохора трудность представляется как субъективное отношение к сложности; в этом смысле и для узкого класса задач (текстовых алгебраических, решаемых методом уравнений) этот подход приводит к определенным позитивным результатам. Однако и в этом случае предложенные им граф-схемы довольно громоздки и плохо обозримы. Более простой способ определения сложности текстовых алгебраических задач, основанный на той же идее[3], был предложен Т. В. Монаховой, которой удалось использовать граф-схемы не только для оценки сложности задачи, но и

---

[1] См.: Эсаулов А. Ф. Программированное обучение и стандартизация в процессе творческого решения задач. — В кн.: Вопросы активизации мышления и творческой деятельности учащихся. М., 1964, с. 72—73. См. также:

а) Алексеев Н. Г. Проблема управления мыслительной деятельностью при решении алгебраических задач и их классификация. — В кн.: Вопросы активизации мышления и творческая деятельность учащихся. М., 1964, с. 159.

б) Лернер И. Я. Факторы сложности познавательных задач. — В кн.: Новые исследования в педагогических науках. М., 1970, № 1 (X), с. 30.

[2] Сохор А. М. Об анализе внутренних связей учебного материала. Сообщение III. Дидактическая классификация алгебраических задач. — В кн.: Новые исследования в педагогических науках, № 2 (XV). М., 1970, с. 72.

[3] См.: Сохор А. М. Логическая структура учебного материала. М., 1974, с. 128.

в качестве особого нестандартного способа решения задач этого типа[1].

Т. В. Монахова при оценке сложности текстовых задач решение задачи представляет в виде графа, вершинами которого являются значения величин (известных или неизвестных) из рассматриваемой задачи, расположенные на различных уровнях, а ребрами — связи между различными величинами или значениями одной и той же величины.

Наиболее емкой характеристикой понятия сложности задачи можно, на наш взгляд, считать характеристику, данную А. М. Матюшкиным, согласно которой сложность задачи определяется следующими факторами[2]: а) числом условий задачи (числом конкретных данных); б) числом существенных взаимосвязей между данными, данными и искомым; в) числом опосредований, необходимых для достижения искомого; г) числом преобразований, приводящих к искомому.

Следует отметить, что большинство предлагаемых критериев оценки сложности предполагает, что в ходе решения задачи учащийся будет следовать жестко определенному алгоритму, ибо именно этот алгоритм отражает число элементарных актов (умозаключений, преобразований, используемых утверждений, построений и т. п.), которые должен осуществить учащийся, чтобы решить эту задачу. Совершенно прав В. Н. Сергеев, говоря о том, что в этом случае по существу «оценивается не сложность задачи, но сложность решения задачи, оценка фактически является не априорной, а апостериорной»[3]. Неоднозначность такой оценки, ее зависимость от способа решения задачи очевидна. Ясно также, что эта оценка применима только к задачам, решение которых может быть осуществлено алгоритмическим путем. В. Н. Сергеев считает нецелесообразной (и даже бесполезной) оценку сложности задач.

Узость подобной оценки сложности задач несомненна. Однако следует иметь в виду, что многие задачи школьного курса математики допускают алгоритмическое решение и ставятся с заранее определенной установкой на определенный способ их решения школьниками; часто также те или иные задачи ставятся именно для того, чтобы обучить (поупражнять, проиллюстрировать) определенному алгоритму. Поэтому вряд ли можно отрицать полезность оценки сложности задачи с этих позиций; важно понимать ограниченность этой оценки и использовать эту оценку в разумных пределах.

---

[1] См.: Монахова Т. В. Об одном нестандартном методе решения алгебраических задач. — В кн.: Роль и место задач в обучении математике. Вып. 1. М., 1973, с. 203—209.

[2] См.: Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972, с. 194.

[3] Сергеев В. Н. О критериях отбора и оценки олимпиадных задач. Материалы II межвузовского научно-методического семинара «Физико-математическая подготовка во втузе в современный период НТР». Под ред. В. М. Зубова, В. Н. Сергеева. Омск, 1974, с. 62.

Важно подчеркнуть, что при всем различии подходов к определению понятия сложности задачи всем им присуща одна общность — понятие сложности задачи есть ее объективная характеристика, зависящая от структуры задачи в целом.

Значительно меньшей определенностью характеризуются подходы к трактовке понятия трудности задачи. О. К. Тихомиров отмечает почти полное отсутствие работ, где специально анализировался бы вопрос о том, почему одни задачи решаются легко, а другие — трудно[1], объясняя это целым рядом объективных факторов, связанных с главным объектом — задачей.

Г. А. Балл не ограничивается одним показателем для характеристики трудности задачи, под которой он понимает объем умственного труда, необходимого для решения задачи. Помимо трудности, он вводит характеристику «проблемности задачи», которая показывает, в какой мере для решения задачи требуется выйти за пределы имеющихся в распоряжении решающего алгоритмов, и характеристику, названную им «дефицитом определенности», выражающую возможность применения какого-либо алгоритма проверки предложенного решения[2].

Проявления трудности в процессе решения задач весьма многообразны. Так, например, при изменении внешних (или внутренних) условий задачи, нарушающих привычный для человека стереотип, происходит перестройка, трансформация ранее усвоенных умений и навыков и последовательности их применения. Это приводит к тому, что в структуру процесса решения задачи включаются новые или непредусмотренные ранее операции (умственные и практические).

Характеризуя понятие трудности, А. М. Матюшкин пишет: «Трудность проблемной ситуации характеризуется соотношением двух главных показателей: а) степенью новизны и обобщенности усваиваемого неизвестного и б) интеллектуальными возможностями учащегося»[3].

Кроме того, трудность учебной задачи оценивается количественно как отношение усваиваемых знаний (обучающих функций) к числу усвоенных знаний (реализованных в ходе решения задачи обучающих функций)[4].

Внешне этот критерий оценки трудности задачи выглядит весьма убедительно. Однако практическое его использование представляется весьма сложным. В самом деле, для того чтобы применить этот критерий, нужно выявить все обучающие функции данной

---

[1] См.: Тихомиров О. К. Структура мыслительной деятельности человека. М., 1969, с. 222.

[2] См.: Балл Г. А. О психологическом содержании понятия «задача». — «Вопросы психологии», 1970, № 6, с. 81—83.

[3] Матюшкин А. М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении. М., 1972, с. 196.

[4] См.: Зенькович А. П. Дифференцированный подход к самостоятельным работам учащихся на уроках. Автореф. канд. дис. М., 1972.

задачи (на практике же выявляются и реализуются только некоторые из них), и, кроме того, «подсчитать» число усвоенных знаний, что сделать весьма непросто. Более того, в такой оценке не учитывается возможность в реализации развивающих и воспитывающих функций, присущих почти каждой задаче или процессу ее решения, а следовательно, не учитывается ни состояние знаний и развития школьников, решающих задачу, ни наличие у них опыта в решении задач того или иного типа.

Между тем опыт представляет собой гораздо больший объем сведений, чем те, которые человек в состоянии выделить сознательно. «Доказано, что многое запоминается человеком независимо от его сознания и содержится в его латентной, скрытой памяти... Объем сведений о прошлом, размеры опыта прошлого в различных условиях не могут быть одинаковыми... предсказания базируются на опыте прошлого, на анализе прошлых событий, подсознательно запечатленных в нашей памяти и под воздействием определенной совокупности причин, вызываемых в сферу сознания»[1].

Таким образом, не учитывать опыт в решении задач — значит не учитывать интуицию, которая представляет собой опыт, возникающий в сознании из глубины подсознания. Это лишний раз подтверждает тот факт, что интуиция не может рождаться «на пустом месте»; для того чтобы она «работала», необходимы знания, опыт их приобретения и использования.

Рассматривая вопрос традиционной оценки трудности задач олимпиадного характера, находящую свое выражение в некотором натуральном числе (числе очков), приписываемом каждой задаче, В. Н. Сергеев справедливо указывает на малую эффективность такой оценки (возникающей путем усреднения индивидуальных оценок экспертов-преподавателей). Называя такую оценку ПОТ (псевдообъективной оценкой трудности), В. Н. Сергеев предлагает ее усовершенствовать следующим образом[2]:

а) наряду с группой экспертов-преподавателей использовать группу экспертов-школьников;

б) учитывать при оценке трудности задачи особый коэффициент $K$ — число, обратное числу решивших эту задачу школьников. Тогда результирующая оценка трудности задачи может быть определена по формуле:

$$O = \begin{cases} K_1, \text{ если } K_1 \leqslant \frac{3}{4} K, \\ K_1 + S\frac{K}{n}, \text{ если } K_1 > \frac{3}{4} K. \end{cases}$$

---

[1] Ивахненко А. Г., Лапа В. Г. Кибернетические предсказывающие устройства. Киев, 1965, с. 4.

[2] См.: Сергеев В. Н. О критериях отбора и оценки «олимпиадных» задач. — В кн.: Материалы II межвузовского научно-методического семинара «Физико-математическая подготовка во втузе в современный период НТР». Омск, 1974, с. 64.

Здесь $O$ — окончательная оценка; $K$ — число очков, назначенных для решения задачи; $K_1$ — оценка решения, полученная при проверке; $n$ — число участников, для которых $K_1 > \frac{3}{4}K$; $S$ — коэффициент, подобранный эмпирически и зависящий от общего числа решающих, числа решаемых задач и времени, отведенного на их решение (в цитируемой статье для 100 решающих, 18 задач и 4 *ч* времени, $S = 1$).

Рассмотренный способ оценки трудности задачи представляется нам весьма перспективным и для разработки критерия оценки трудности каждой задачи, помещенной в учебниках математики. Возможность и полезность такой оценки задач и упражнений обусловливается прежде всего стабильностью (повторяемостью из года в год) «основного задачного материала», используемого в обучении математике.

Существуют попытки усовершенствовать этот критерий. Так, например, В. Ф. Чучуков предлагает при оценке трудности задач выделять объективную ($T_o$) и субъективную ($T_c$) ее компоненты[1].

Под объективной компонентой ($T_o$) понимается совокупность характеристик задачи, не зависящих от решающего задачу человека (число подзадач, на которые данная задача может быть расчленена, сложность связи решений подзадач в единое целое — решение данной задачи, число возможных способов ее решения и т. п.). Субъективная компонента ($T_c$) представляет собой совокупность потенциальных возможностей ученика (уровень состояния знаний, умений и навыков, уровень математического развития и т. п.).

В практике школьного обучения математике до сих пор оценка сложности или трудности той или иной задачи проводится учителями (а также методистами и авторами учебных руководств) в основном по соображениям «здравого смысла», основанном на собственных знаниях и опыте или на субъективной оценке задачи.

На основе выполненного в ходе исследования критического анализа работ можно с уверенностью сделать следующие выводы:

а) понятия сложности и трудности задачи следует различать;

б) сложность задачи является в значительной степени объективной ее характеристикой, зависящей от структуры задачи в целом;

в) трудность задачи представляет собой совокупность субъективных факторов, отражающих особенности деятельности решающего задачу;

г) разработанные критерии оценки задачи по этим двум параметрам (в том числе и оценки математическими средствами) могут быть практически применены только к оценке учебных математических задач традиционного характера, допускающих алгоритмическое решение;

д) данный вопрос нуждается в специальном *комплексном* исследовании, проводимом совместно группой психологов, дидактов и методистов.

Не предполагая проводить специального исследования по этому вопросу, выскажем некоторые общие соображения по существу дела.

---

[1] Чучуков В. Ф. К вопросу о трудности математической задачи.— В кн.: Материалы II межвузовского научно-методического семинара «Физико-математическая подготовка во втузе в современный период НТР». Омск, 1974, с. 176—178.

Общепринятое толкование *сложности* как в определенном смысле объективной характеристики задачи, а *трудности* как ее субъективной характеристики, зависящей от субъекта решающего задачу, вполне согласуется с принятым нами системно-психологическим подходом к понятию задачи.

Как сложность, так и трудность являются определенными характеристиками системы ($S$, $P$).

Прежде всего следует отличать сложность самой задачи, от сложности решения задачи; трудность самой задачи от трудности процесса ее решения.

Говоря о *сложности задачи*, мы по существу имеем в виду сложность самой задачной системы (число и характер свойств и отношений между элементами и его подмножествами, в силу которых $P$ выступает как система).

Говоря о *сложности решения задачи*, мы по существу говорим о характере перехода $P_x$ в $P$, оцениваем способ решения задачи, тесно связаны с его базисом (число и характер необходимых при этом преобразований, выкладок, шагов, подзадач и т. п.).

Таким образом, сложность самой задачи и сложность решения задачи являются в некотором смысле ее объективными характеристиками, часто не зависящими от субъекта принявшего задачу (или того, кому задача адресована опосредованно), могущими даже быть заранее запрограммированными для субъекта.

Говоря о *трудности* задачи, мы по существу имеем в виду условия, при которых осуществляется контакт субъекта с системой $P$, осознание проблемности $P_x$, понимание смысла задачи.

Говоря о *трудности процесса решения задачи*, мы по существу говорим о характере взаимодействия субъекта и $P_x$, о его возможностях осуществить переход от $P_x$ к $P$, о тех усилиях, которые им будут проявлены в процессе решения задачи.

Таким образом, трудность самой задачи и трудность процесса решения задачи являются ее субъективными характеристиками, зависящими от многих факторов (запаса имеющихся у субъекта знаний, степени их глубины и общности, уровня овладения им различными интеллектуальными и практическими умениями, наличия опыта в решении задач, интереса к задаче, степени потребности в ее решении и т. п.).

Понятно, что трудность задачи и трудность процесса решения задачи зависят также и от сложности задачи и ее решения.

Сложность и трудность проявляются на различных этапах взаимодействия субъекта с системой $P_x$, в различных взаимосочетаниях. Так, например, бывает трудно понять смысл задачи, разобраться в ее условии; решить же данную задачу оказывается легко. Точно так же, может оказаться сложным осуществление на практике уже найденного в принципе решения или проверка правильности конкретного результата решения.

В школьном обучении возможно и целесообразно заранее оценивать сложность учебных математических задач, предлагаемых учащимся, в разумной мере программировать (и оценивать) сложность решения наиболее важных в каком-либо отношении задач. Методически правильной постановкой учебных задач можно регулировать уровень трудности задачи; методически продуманной организацией процесса решения задач школьниками, системой их подготовки к самостоятельному решению задач и т. п. можно в необходимых границах контролировать и трудность процесса решения задачи.

Регулирование учебных математических задач по этим четырем параметрам чрезвычайно важно для получения эффективных результатов обучения математике. При этом, следует иметь в виду, что многие математические задачи, решаемые школьниками, предназначены для глубокого и прочного усвоения в с е м и школьниками программного материала и потому не должны быть ни излишне сложными, ни излишне трудными. Вместе с тем следует помнить, что решение трудной задачи существенно полезнее для школьника, чем решение сложной задачи или сложно решаемой задачи; важно не пред-

лагать школьникам заведомо трудные для них задачи без соответствующей подготовки учащихся к их решению.

При оценке учебных задач по каждому из названных параметров следует по возможности учитывать то учебное время, которое предполагается отвести учащимся на их решение, соотносить его с тем временем, какое может фактически понадобиться для этого каждому школьнику.

Заметим, что использование разработанной нами типологии задач в процессе применения задач в школьном обучении математике может оказаться весьма полезным для соблюдения принципа возрастающей трудности в последовательности задач, предлагаемых учащимся.

## ОСОБЕННОСТИ МЫСЛИТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В отличие от позиции психологов и кибернетиков, характеризующих процесс решения задачи, в теории и практике обучения (и в частности, обучения математике) процесс решения задачи человеком имеет особое значение. В кибернетике процесс решения задачи человеком исследуется под углом зрения его возможного моделирования в автоматических устройствах; здесь важно выявить характерные черты этой деятельности, расчленить их на элементы, которые можно ввести в память ЭВМ (или учесть в ее конструкции). При этом важное значение приобретают те способы, которые приводят к решению задач определенных типов. В психологии процесс решения задач изучается в основном с целью выявления внутренних механизмов человеческого мышления и установления совокупности управляющих ими закономерностей. В теории и практике обучения в процессе решения задач человеком внимание акцентируется, во-первых, на управлении этой деятельностью в соответствии с целями обучения, воспитания и развития; во-вторых, на обучении школьников тем ее компонентам, органическое сочетание которых обеспечивает активную работу мышления, а отсюда — сознательное усвоение учащимися основ наук, отраженных в каждом учебном предмете. Таким образом, в какой-то степени различными в психологии, кибернетике и дидактике оказываются конечные цели исследования этой деятельности, в то время как промежуточные цели исследования совпадают.

Вот почему для соответствующего дидактического исследования направление поисков и анализ результатов исследований, приведенных психологами и кибернетиками, представляет первостепенный интерес.

Напомним, что мы отличаем процесс решения задачи (деятельность решающего задачу) от решения задачи (способа преобразований проблемной системы в стационарную). Заметим, что такое различение не является новым и потому не нуждается в особых комментариях. Психологи и кибернетики, занимающиеся изучением мышления человека, никогда не путают эти два понятия. Иное дело в методике, где очень часто термином «решение задачи» (ре-

шение уравнения) обозначают оба понятия: сам процесс и его результат. В основном это связано с тем, что в русском языке нет грамматического оттенка, позволяющего использовать по существу один и тот же термин для выражения этих родственных друг другу понятий[1].

Трудно представить себе возможность существования достаточно полной и достаточно общей модели процесса решения задачи. Слишком уж индивидуальна и сама деятельность решающего задачу, и отношение субъекта (человека, решающего задачу) к объекту (заданной системе), в силу чего при решении одной и той же задачи различными людьми различно оценивается ее трудность, сложность, возможность использования в решении того или иного метода и приема.

Однако процессу решения задачи присущи определенные общие черты, связанные с разбиением его на отдельные этапы, с общей характеристикой деятельности решающего на каждом из них, с теми эвристическими приемами, которые используются человеком, и т. д.

Так как в школьном обучении немалое значение имеет управление деятельностью учащихся по решению задач в соответствии с целями обучения, воспитания и развития, для методического исследования важно установить, хотя бы в общих чертах, структуру процесса решения задачи. Сделаем еще одно предварительное замечание. В кибернетике делается достаточно четкое различие между задачами, требующими для своего решения деятельности алгоритмического или деятельности эвристического характера.

«Особым и важным свойством некоторых «генераторов решений»[2] является даваемая ими гарантия, что если задача имеет решение, то генератор рано или поздно найдет его. Процесс, обладающий таким свойством для некоторой задачи, мы будем называть *алгоритмом* для решения этой задачи»[3].

«Процесс, который мог бы решить данную задачу, но не дает никаких гарантий этого, называется *эвристическим* для данной задачи»[4].

Вышеупомянутая характеристика алгоритмического и эвристического процессов достаточно емкая. С дидактических позиций она формулируется несколько иначе. С полным основанием можно считать, что если школьник знает, как решать задачу данного типа, то его деятельность в ходе решения носит алгоритмический харак-

---

[1] Заметим, что в болгарском языке такое грамматическое отличие существует: решение и решаванне. См., например: И. Ганчев. За математическите задачи. София, «Народна Просвета», 1971, с. 12.

[2] В качестве генератора решений «может рассматриваться, в частности, и человек». (*Ю. К.*)

[3] Ньюэлл А., Шоу Дж., Саймон Г. Эмпирические исследования машины. «Логик-теоретик», пример изучения эвристики. — В кн.: Вычислительные машины и мышление. Под ред. Э. Фейгенбаума и Дж. Фельдмана. М., 1967, с. 118.

[4] Там же, с. 118—119.

тер; если же задача данного типа встречается ему впервые (даже если решение ее может быть достигнуто посредством и несложного алгоритма), его деятельность приобретает эвристический характер.

Для решения некоторых нестандартных задач оказывается достаточным установление неявных связей между ее данными; для других необходимо многократное сопоставление данных и искомых Одни задачи допускают решение в рамках ограниченной ситуации; другие требуют расширения, выхода за рамки очевидного. Решение одних задач требует необычного применения некоторой системы знаний (и связано с работой долговременной памяти); решение других может быть осуществлено посредством простой сообразительности (и связано с работой интуитивного мышления) и т. п.

В процессе решения задачи можно весьма условно выделить его внешнюю и внутреннюю структуры. Внешняя структура процесса решения задачи представляет собой совокупность так называемых *операционных* факторов. К ним относятся прежде всего логическая структура решения, различные преобразования задачной системы, последовательность в осуществлении решения задачи и т. п.; к ним можно также отнести и расчленение процесса решения задачи на определенные рабочие этапы.

Внутренняя структура процесса решения задачи представляет собой совокупность факторов, называемую *информационной*. К ним относятся те мыслительные операции, которые обеспечивают восприятие и переработку условий задачи, внутренний механизм поиска и планирования решения, осуществления корректирующего контроля и т. п.; к ним можно также отнести определенные состояния мышления, обеспечивающие успешность процесса решения задачи или затрудняющие его.

Внешняя структура процесса решения задачи выражается в поведении решающего задачу; составляет содержание непосредственной деятельности в ходе решения задачи, может быть охарактеризована определенными количественными показателями и сравнительно легко промоделирована автоматом. Внутренняя структура процесса решения задачи выражается в скрытой умственной деятельности решающего задачу, составляет внутреннее содержание этой деятельности, определенные состояния мышления; моделированию в автоматах она поддается плохо, так как ее скрытые закономерности еще недостаточно изучены.

Понятно, что в реальном процессе решения задачи оба его аспекта (внешний и внутренний) тесно взаимодействуют друг с другом, образуя единое целое.

Ведущее значение внутренней структуры процесса решения задач по мере развития психологии как науки было признано сравнительно давно. И даже те школы психологов, которые строили свои исследования на позициях, весьма далеких от диалектического материализма (ассоциативисты, представители Вюрцбургской школы психологов, гештальт-психологи и др.), считали внут-

реннюю структуру мышления ведущей. На заре развития психологии только бихевиористы отрицали возможность и целесообразность ее изучения, сводя изучение мышления к изучению поведения субъекта, решающего задачу.

В ходе исследований по экспериментальной психологии выдвигались различные гипотезы о тех механизмах мышления, которые «управляют» этой внутренней структурой мышления, проявляющегося в процессе решения задач[1]. Ассоциативисты считали, что таким механизмом является совокупность определенных ассоциаций; гештальт-психологи представляли себе внутреннюю структуру мышления как процесс видоизменений особого состояния мышления, названного ими гештальтом, доведенного до его кульминации — инсайта (внезапного озарения); представители Вюрцбургской школы психологов роль основного механизма мышления приписывали так называемой детерминирующей тенденции или некоторой функциональной системе умственных операций; представители школы психологов Ж. Пиаже считали основой мышления формирование особых психологических структур, аналогичных структурам математическим.

Исследованиями советских психологов было показано, что формирование внутренней структуры процесса решения задачи является управляемым компонентом этого процесса, управление и регулирование которого осуществляют «...связи и отношения между элементами конечной ситуации, с точки зрения которых осуществляется осмотр условий задачи»[2]. Иными словами, в роли регулировщика поиска решения задачи выступает ее цель, ее искомые элементы, под углом зрения которых происходит формирование внутренней структуры процесса решения задачи и наложение ее на внешнюю его структуру.

Это положение представляется нам весьма важным, хотя бы в силу того, что дает возможность управлять внутренним механизмом деятельности решающего задачу (посредством соответствующих переформулировок условия задачи, разбиением основной цели задачи на систему подцелей, с помощью продуманной системы указаний и т. п., т. е. создания некоторой последовательности эвристик). Тем самым открываются реальные возможности обучения школьников решению задач вообще (а не разучиванию решений типовых задач), обучению общим приемам решения задач.

Опытные учителя давно пришли к выводу о необходимости создания определенных эвристик при решении школьниками задач и успешно применяют их в практике обучения математике[3].

---

[1] См., например: Анциферова Л. И. Материалистические идеи в зарубежной психологии. М., 1974.

[2] Пушкин В. Н. Психология и кибернетика. М., 1971, с. 126.

[3] См.: Кирсаиов А. А. В творческом поиске. — В кн.: Поиски рациональных способов преподавания математики (Из опыта учителей Татарии). Сост. Э. Г. Мингазов. М., 1969, с. 23—24.

Так как процесс решения задачи — понятие более широкое, чем понятие эвристической деятельности (последняя входит в него лишь в качестве важного компонента), ясно, что многие результаты исследований по эвристике имеют непосредственное отношение и к процессу решения задачи. Поэтому многие исследования эвристической деятельности, проводимые философами, кибернетиками, психологами и дидактами, естественно вплотную подходят и к исследованию процесса решения задачи.

Точка зрения кибернетиков на этот вопрос достаточно ярко отражена в следующей весьма общей характеристике процесса решения задачи.

«Решение задачи[1] рассматривается как поиск в огромном лабиринте возможностей, лабиринте, который описывает внешнюю среду. Успешное решение задачи предполагает селективный поиск и сокращение исходного многообразия возможностей до обозримого множества»[2].

Ясно, что такую характеристику процесса решения задачи не назовешь рабочей, если даже согласиться с ней полностью. Поэтому больший интерес, естественно, представляют не столько общие характеристики этого процесса в целом, сколько более локальные и более конкретные характеристики его специфических особенностей, тем более что «в настоящее время нет даже зачатков формальной теории решения интеллектуальных задач»[3].

М. Л. Минский представляет процесс решения такой задачи человеком в виде следующей последовательности действий[4]:

1) расчленение задачи на комплекс подзадач;
2) поиск необходимой информации в сложной системе памяти;
3) выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода (из известных);
4) выбор стратегии решения;
5) разработка подробного плана решения;
6) постоянная корректировка структуры подцелей.

Характеризуя второй из названных выше этапов, М. Л. Минский пишет: «Система памяти и этот механизм содержат информацию как о специальной области, к которой относится решаемая задача, так и об общих методах решения задач и даже «методах их совершенствования». И далее: «В результате при решении сложной задачи мы должны строить сильно разветвленное дерево частных задач и целей, подзадач и подцелей. Некоторые из задач окажутся связанными условием, «или», ... некоторые образуют группу «и» ...»[5]. Данное описание процесса решения задачи, хотя и до-

[1] Речь идет о процессе решения задачи.
[2] Саймон Т. Наука об искусственном. М., 1972, с. 37.
[3] Минский М. Л. Проблемы в области искусственного интеллекта. В кн.: Математические проблемы биологии. Под ред. Р. Беллман. М., 1966, с. 79.
[4] Минский М. Л. Проблемы в области искусственного интеллекта. — В кн.: Математические проблемы биологии. Под ред. Беллман. М., 1966, с. 79—80.
[5] Там же, с. 82.

статочно общо, все же, на наш взгляд, дает правильную характеристику того, что происходит в действительности.

Этот вывод подтверждается и в ходе многочисленных экспериментов со школьниками на примере следующей (нестандартной для школьного обучения) задачи.

Построить угол, величина которого равна половине величины данного угла, не проводя непосредственного деления данного угла на два конгруэнтных угла.

Во всех случаях успешного решения этой задачи школьниками (около 30 примерно из 100 испытуемых) нахождение верного решения было обусловлено правильно организованным поиском в системе памяти необходимой информации и четкостью в реализации указанной последовательности этапов решения[1].

Решающее значение в ходе поиска имела постановка следующего вопроса: «Какие теоремы, связывающие один угол с другим, мне известны?» — и возможные ответы на этот вопрос:

а) во всяком треугольнике величина внешнего угла больше величины внутреннего, с ним не смежного;

б) сумма величины внутренних углов треугольника равна $2d$;

в) величина внешнего угла треугольника равна сумме величин углов треугольника, не смежных с ним;

г) в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны;

д) свойства величин углов в круге (вписанных, центральных, составленных касательной и хордой, и т. д.) и т. п.

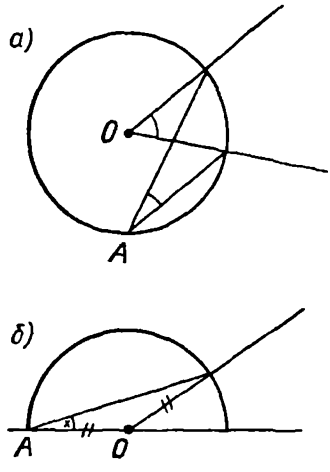


Рис. 7

Критическая оценка извлеченной информации привела одних учащихся к отбору из нее непосредственно той, которая сразу давала искомое решение (величина вписанного угла вдвое меньше величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу), а других — к качественной переработке имеющихся общих утверждений в частное утверждение, также дающее искомое решение (величина внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника вдвое больше величины угла при его основании).

Найденные ключевые теоретические положения определили выбор «приемлемого в данных условиях» метода решения (построение с помощью циркуля и линейки) и стратегии решения (изображение данного угла в виде центрального или внешнего относи-

[1] Первый этап расчленения данной задачи на подзадачи не имел места ввиду относительной простоты данного задания.

тельно некоторого равнобедренного треугольника). План решения этой задачи был очевиден и стал непосредственно претворяться в жизнь.

Корректировка структуры подцелей выразилась у некоторых школьников в том, что в ходе построения они обнаружили возможность выполнять решение непосредственно на данном изображении угла, а не строить угол, конгруэнтный данному (рис. 7).

Кроме того, она проявилась и в том, что учащиеся (в ходе реализации плана решения) обнаружили возможность произвола при выборе точки $A$ на окружности (длина стороны треугольника — $[OA]$). Интересно отметить, что у нескольких учащихся найденный способ решения позволил им усмотреть, что с его помощью может быть решена и другая задача, аналогичная данной (построить угол, величина которого вдвое больше величины данного, и т. д.).

В ходе этого эксперимента ярко проявилась и справедливость следующего замечания М. Л. Минского: «...необходимо извлекать (из памяти. — *Ю. К.*) утверждения группами, из которых предстоит делать выводы, так как непосредственно применимые утверждения не могут быть запасены на все случаи жизни»[1].

Не будет большим преувеличением сказать, что описанная последовательность этапов процесса решения задач во многом определяет основы наиболее целесообразной методики решения многих задач в школьном обучении.

С методической точки зрения представляет немалый интерес и замечание М. Л. Минского о порядке выбора подзадач (равно как и обнаруженных теоретических положений, имеющих отношение к решаемой задаче), связанных между собой через «*и*» или «*или*».

«Естественно, — пишет М. Л. Минский, — что в группе «*или*» надо первой пробовать решать ту из задач, которая кажется проще.

Для группы «*и*» вопрос сложнее. Начинать ли с простейшей из задач на том основании, что в случае неудачи будет потеряно минимальное время? Или начинать с самой трудной на том основании, что она скорее всего и будет решающей, и если все задачи удается решить, и ее нет, то все время будет потеряно напрасно? При решении последовательных задач приходится идти на компромисс между оценками трудности и налагаемыми ограничениями; в других случаях можно решать первой ту из задач, решение которой налагает наименьшие ограничения, оставляя наибольшую свободу действий для решения остальных»[2].

В этом высказывании нетрудно усмотреть определенную систему рационального подхода к решению задачи, формировать которую у школьников, безусловно, желательно.

---

[1] Минский М. Л. Проблемы в области искусственного интеллекта. — В кн.: Математические проблемы биологии. Под ред. Р. Беллман. М., 1966, с. 79.

[2] Минский М. Л. Проблемы в области искусственного интеллекта. — В кн.: Математические проблемы биологии. Под ред. Р. Беллман. М., 1966, с. 83.

Понятно, что М. Л. Минский размышляет о создании ЭВМ высокой степени интеллектуальности, а не о развитии интеллекта ребенка (что является нашей задачей). Тем не менее показательно его утверждение о том, что люди легче, чем машины, справляются с решением таких задач. Пытаясь, хотя бы в общих чертах, установить причину этого явления, М. Л. Минский высказывает гипотезу о том, что в процессе решения задач человеком осиовную роль играют какие-то, пока неизвестные формы параллельного поиска в активной памяти с большим числом внутренних связей или же решающей оказывается система последовательно применяемых эвристических методов поиска с удачно используемой индексификацией. В свете этих высказываний становится очевидной полезность формирования у школьников именно тех свойств интеллекта, которые с таким трудом поддаются моделированию через ЭВМ.

Довольно хорошо согласуется с характеристикой процесса решения задачи, данной М. Л. Минским, характеристика процесса решения инженерной задачи, данная Д. Диксоном, который, по его мнению, состоит из следующих основных этапов:

1. Определение задачи в такой форме, для которой возможно получение решения.

2. Построение модели достаточно простой для того, чтобы получить решение и достаточно сложной, чтобы результаты решения имели смысл (определенную ценность).

3. Использование в ходе анализа модели теоретических положений (желательно принципов и идей, а не готовых формул).

4. Проверка результатов и самого решения (сопоставление его с условием, с целью установить правомерность преобразований; соответствие их здравому смыслу и т. п.).

5. Оценка полученных результатов, их изучение или обобщение, соотнесение их с реальным объектом.

6. Оформление результатов в наиболее эффективной форме (с акцентом на существо, а не детали)[1].

Заметим, что в указанной характеристике мы намеренно перефразировали отдельные предложения, заменив термины, специфические для инженерной деятельности, адекватными им более общими терминами.

О. К. Тихомиров выделяет следующие основные компоненты процесса решения задачи: цель, ориентировка в условиях, алгоритм и схема, сличение полученных результатов с условиями задачи[2].

Комментируя содержание деятельности, соответствующей каждому из них, автор правильно указывает, что цель любой задачи, как правило, предстает перед решающим (или преобразуется им) в определенной системе подцелей, выступающих в форме вопросов,

[1] См.: Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. М., 1969, с. 119—120.

[2] См.: Тихомиров О. К. Эвристическое программирование и психология творческого мышления. — В кн.: Проблемы научного творчества в современной психологии. Под ред. М. Г. Ярошевского. М., 1971, с. 299—300.

которые решающий задает себе сам. Если задача решается коллективно (например, в классе), эти вопросы обычно задаются учителем. В этом случае происходит определенное срастание этого компонента процесса решения со вторым из указанных О. К. Тихомировым — ориентировкой в условиях.

Говоря об этом этапе, О. К. Тихомиров также правомерно отмечает, что такая ориентировка имеет различные фазы: первоначальное ознакомление с условием, его целостное схватывание, исследование функциональных возможностей его элементов (и соотношений между ними) и «переобследование» ситуации. На наш взгляд, «переобследование» ситуации задачи также можно разделить на полное и частичное. Полное «переобследование» наступает в том случае, когда намеченное (и осуществленное) направление поиска решения оказывается тупиковым, частичное «переобследование» часто осуществляется в ходе реализации попыток решить ту или иную подзадачу, достичь той или иной подцели.

Под алгоритмом и схемой О. К. Тихомиров понимает некоторую общую схему деятельности решающего. Он не раскрывает содержание этого компонента, по-видимому, по причине большого разнообразия этих схем, имеющих ярко выраженный субъективный характер. Представляется, однако, возможным выделить все же определенную последовательность действий решающего, имеющую место в большинстве случаев.

По нашему мнению, последний компонент процесса решения задачи трактуется О. К. Тихомировым чересчур узко. Правильно указывая, что сличение результатов с условием частично проходит и на промежуточных этапах решения задачи, автор пишет: «Процессы сличения связаны не только с прекращением (при достижении заданного результата) или продолжением (при недостижении) исследовательской деятельности, но и с ее направлением»[1].

Экспериментальные исследования показывают, что при сильной эмоциональной настройке на решение задачи (наличие сильного доминантного очага) у человека часто возникает вторичная установка на продолжение работы над данной задачей. В этом случае этап проверки правильности найденного решения (и удовлетворение результатом работы) перерастает в этап ориентировки уже не столько в условиях данной задачи, сколько в способе ее решения, в достигнутых решением результатах. Желание и дальше работать над задачей приводит к началу поиска других решений задачи, изучению возможности обобщить задачу, провести исследование особых ее случаев и, наконец, возможностей изменить условие данной задачи с тем, чтобы получить новую, аналогичную решенной, но отличающуюся от нее в интересующем решающего аспекте.

---

[1] Тихомиров О. К. Эвристическое программирование и психология творческого мышления. — В кн.: Проблемы научного творчества в современной психологии. Под ред. М. Г. Ярошевского. М., 1971, с. 300.

Как бы ни проводилось разбиение процесса решения задачи по этапам, на каждом из них в той или иной форме проявляются два важнейших компонента, присущих этому процессу, от эффективности которых по существу зависит успешное осуществление решения — поиск и планирование решения.

«Основной процесс, с помощью которого человек добивается успеха в решении задачи при неясности и непосредственности пути решения, — это процесс поиска. Этот процесс не гарантирует заранее успеха. Он состоит в пробах различных методов решения. Прежде всего отбираются зарекомендовавшие себя ранее или внушающие надежду методы, которые проверяются в действии. Затем, если успех не достигнут, результаты изучения задачи могут привести к гипотезам о пригодности каких-либо новых методов, к проверке этих методов и т. д.»[1].

Подводя итог многочисленных экспериментальных исследований, известный советский психолог А. Я. Пономарев отмечает, что процесс решения задачи может быть представлен следующими общими этапами:

1) осознание проблемы — возникновение проблемы, понимание наличных фактов, постановка вопроса;

2) разрешение проблемы — выработка гипотезы, развитие решения, вскрытие принципа, выработка суждения, фиксирующего решения;

3) проверка решения[2].

Такая шкала этапов может успешно применяться для анализа хода решения любой более или менее сложной учебной математической задачи.

«...*Поиском* можно назвать процесс, при котором производятся воздействия на объекты внешней среды, носящие частично «разведывательный», «пробный», познавательный характер»[3].

Различают поиск *внутренний* и *внешний*. Первый представляет собой построение мысленной гипотетической модели изучаемого объекта или явления, второй — воздействие на это явление и объект и анализ результатов этого воздействия.

«Метод поиска — это основной метод самостоятельного добывания новых сведений»[4]. В самом деле, если решение задачи осуществляется при помощи готового алгоритма (системы правил, гарантирующих успех), то такое решение задачи требует лишь примене-

---

[1] Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. Под ред. Я. З. Цыпкина. М., 1972, с. 132—133.

[2] См.: Пономарев А. Я. Развитие проблем научного творчества в советской психологии. — В кн.: Проблемы научного творчества в современной психологии. Под ред. М. Г. Ярошевского. М., 1971, с. 124.

[3] Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. Под. ред. Я. З. Цыпкина. М., 1972, с. 118.

[4] Там же.

ния имеющихся знаний. Если решение задачи осуществляется эвристическим путем (не гарантирующим успеха), то оно требует использования каких-то новых знаний, умений.

«Творческие навыки в основном представляют собой усовершенствованные методы поиска нового, находимые в свою очередь путем поиска»[1].

Исследуя значение планирования в интеллектуальной деятельности человека, Дж. Миллер и др. выделяют две разновидности таких планов: систематические и эвристические[2].

Систематические планы ими отождествляются с алгоритмами. Примером возможной реализации такого плана может быть решение задачи «Найти мяч, лежащий где-то на лужайке». Самым надежным способом решения этой задачи была бы операция систематического прощупывания всей лужайки, шаг за шагом. Но, как справедливо отмечают авторы, люди не всегда используют систематические планы для поиска, несмотря на их надежность и разумность, эти планы малоэффективны, не говоря уже о том, что скучны.

План решения характеризуется как эвристический, если систематический план сокращается за счет догадки, попытки вспомнить, где в последний раз встречался искомый предмет, и т. д.

Основное отличие систематического плана от эвристического усматривается в том, что первый, если только он вообще возможен в том или ином случае, всегда надежен, хотя и может потребовать слишком много времени или стоить слишком дорого; второй — может оказаться дешевым и коротким, но он не гарантирует, что ожидаемые результаты будут наверняка достигнуты.

Таким образом, планирование решения задачи есть мыслительная операция, сокращающая поиск решения задачи, т. е. план есть определенная форма эвристики.

Основным связующим звеном между поиском и планированием решения задачи является так называемый «механизм сличения», который представляет собой постоянно функционирующую систему действий решающего задачу, направленных на соотнесение плана (в целом и в деталях) с результатами попыток его реализации. В «механизме сличения» ярко проявляется принцип обратной связи, характерный для любой саморегулирующей системы. Немалую роль в нем играют эмоции, возникающие у решающего задачу в силу возникающих несоответствий между намеченным планом решения и результатами его проверки.

Одной из разновидностей задачи, причем разновидностью весьма своеобразной, являются задачи принятия решений. Ситуация,

---

[1] Пономарев А. Я. Развитие проблем научного творчества в советской психологии. — В кн.: Проблемы научного творчества в современной психологии. Под ред. М. Г. Ярошевского. М., 1971, с. 122.

[2] См.: Миллер Дж., Галантер Ю., Прибрам К. Планы и структура поведения. М., 1965, с. 174.

в которой это происходит, характеризуется следующими основными чертами[1]:

1) наличие цели;

2) наличие альтернативных линий поведения;

3) учет существенных факторов.

«Задача принятия решений возникает в том и только в том случае, когда существует цель, которую нужно достичь, когда возможны различные способы ее достижения и когда имеется большое число факторов, определяющих ценность различных альтернатив или вероятность успеха каждой из них»[2].

По существу всякое принятие решения означает определенный компромисс между целью и различными возможностями ее достижения. Ясно, что такого рода задачи встречаются человеку буквально на каждом шагу, не говоря уже об их значимости в работе инженера, организатора производства, медика и многих других профессий. Можно с уверенностью сказать, что и деятельность учителя весьма часто выступает как процесс принятия решений. И хотя для принятия решений в сложных производственных и экономических ситуациях разработаны различные количественные методы принятия решения (теория оптимизации, теория полезности, математическая статистика и т. д.), в более локальных ситуациях (и более часто встречающихся) человеку приходится решать эту задачу на основе своих знаний, опыта, интуиции; успешность решения часто зависит от индивидуальных черт личности, способностей, наклонностей, эмоциональной настроенности человека. Поэтому многие справедливо считают, что принятие решений сродни искусству. Тем не менее значимость этого вида задач в практической деятельности говорит о необходимости соответствующей подготовки и на уровне школьного обучения, в частности обучения математике. Важнейшими аспектами такой подготовки является формирование способностей *принимать решения*, умения *осуществить выбор* наилучшего решения, тесно связанных с умением *планировать* свою *деятельность* и *прогнозировать* ее *результаты*.

Итак, осуществляя процесс принятия решений, человек (или автомат) должен иметь перед собой три четко определенных компонента: цель, множество альтернатив и критерий выбора. И хотя класс таких задач весьма широк, тем не менее существует немало задач, важных с точки зрения производственной или житейской, процесс решения которых не сводится к выбору из имеющихся альтернатив наиболее оптимальной. В. Н. Пушкин, характеризуя такие задачи, указывает на возможность существования задачных ситуаций, в которых «... условия даны в виде совокупности разрозненных элементов, ... лабиринт задачи неопределен, ... решающая

---

[1] См.: Диксон Дж. Проектирование систем: изобретательство, анализ и принятие решений. М., 1969, с. 302—303.

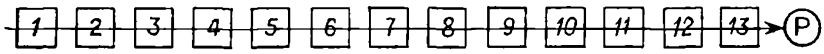
[2] Там же, с. 303.

система должна сама формировать возможные варианты, прежде чем иметь возможность проверять и оценивать их эффективность»[1].

Ранее мы говорили о необходимости отличать термин «решение» от термина «процесс решения». Отметим, что в задачах принятия решения также нет однозначности в использовании соответствующей терминологии. Так, в экономической кибернетике широко используется термин «процесс принятия решения», а термин «решение» трактуется и «как процесс, и как акт выбора, и как результат выбора»[2].

Термин «процесс принятия решения», используемый в экономической кибернетике, и термин «процесс решения», используемый в дидактике, очень близки по своему смысловому значению; более того, первый термин выражает, на наш взгляд, упрощенную модель объекта, выраженного вторым термином.

В экономике чаще всего рассматриваются так называемые *плановые решения*, где разработанный план представляет собой решение, а его разработка — процесс принятия решения. Рассмотрим следующую схему[3] процесса принятия планового решения:




Здесь последовательные этапы процесса принятия решения означают:

1) получение информации;
2) анализ информации;
3) выявление проблемной ситуации;
4) формирование целей;
5) построение моделей системы;
6) разработка перечня альтернатив и их следствий;
7) прогноз альтернатив и их следствий;
8) формирование критерия и (или) профиля предпочтения;
9) постановка задачи;
10) поиск процедур решения задачи;
11) выбор;
12) корректировка решения;
13) реализация решения.

Нетрудно обнаружить, что относительно процесса решения хорошо определенной задачи приведенная модель процесса принятия решения является более общей. Однако по отношению к процессу решения задачи типа ***AXYZ*** она является достаточно полной и, пожалуй, хорошо описывает процесс решения «почти не определенной» задачи, т. е. задачи типа ***XYZU***. Отметим, что в связи

---

[1] Пушкин В. Н. Психология и кибернетика. М., 1971, с. 88.

[2] Кравченко Т. К. Процесс принятия плановых решений (информационные модели). М., 1974, с. 6.

[3] Там же, с. 11.

с небывалым возрастанием значения экономики в народном хозяйстве возникает необходимость сформировать у выпускников средних школ не только элементарные экономические знания, но и соответствующие умения и навыки. Решение в школе специально подобранных задач (в определенном смысле по описанной выше схеме) является весьма желательным.

В эпоху НТР не все этапы решения подобного рода задач являются одинаково важными. Некоторые из них с успехом решаются автоматическими системами. Однако даже при использовании самых совершенных ЭВМ «...нахождение методов и алгоритмов решения задач, определение целей и критериев и т. д. не мыслятся без вмешательства плановика»[1].

Как уже было сказано выше, план представляет собой решение определенной экономической задачи (задачи планирования). Интересно отметить следующую трактовку основных компонентов задачи планирования:

1) сама задача, т. е. цель, которая должна быть достигнута;

2) директива, т. е. средства достижения поставленной цели;

3) ожидаемые обстоятельства, при которых принимаются решения;

4) теоретическая база, т. е. описание зависимости эффекта от средств и обстоятельств.

Интересно также отметить, что эти компоненты плановой задачи рассматриваются в их соотношениях с субъектом (плановиком). Эти соотношения в краткой форме выражаются так:

1) намерение (плановик-задача);

2) приказание (плановик-директива);

3) утверждение (плановик-предсказание);

4) подкрепление (плановик-теоретическая база).

Описанная модель задачи планирования представляет собой один из подходов к выяснению характера связи в системе $(S, P)$ — субъект-объект в ходе решения таких задач. Здесь речь идет о тех основных факторах, которые присущи взаимодействию человека и задачи.

Среди важнейших общих психологических компонентов, имеющих место при решении задач, следует прежде всего упомянуть *мотивацию*, *установку* и *ориентацию*.

Известно, что *мотивация* деятельности, возникающая под влиянием внутреннего или внешнего стимула, во многом определяет уровень активности деятельности субъекта (в данном случае — решающего задачу). В процессе решения задач мотивация влияет на процесс решения задач как в рациональном (желание решить задачу до конца, получить искомый результат), так и в эмоциональном планах (желание решать данную задачу, удовлетворение самим процессом поиска решения).

---

[1] Кравченко Т. К. Процесс принятия плановых решений (информационные модели). М., 1974, с. 24.

Н. М. Амосов выделяет любознательность, рефлекс цели, рефлекс самовыражения и тщеславия в качестве основных стимулов, способствующих положительной настроенности человека в ходе его трудовой, творческой и других видах деятельности[1].

Заметим, что эмоциональная окраска свойственна и действиям, называемым рациональными. Поэтому эмоциональная настроенность играет большую роль в процессе решения задачи, во многих случаях определяя успешное его протекание.

*Установка* — более сильное и более глубокое, чем мотив, психическое состояние готовности человека к определенной деятельности, характеризующее более высокий уровень ее активности. Установка не столько настроенность человека на действие, сколько сильная форма проявления деятельности.

Наконец, *ориентация* понимается как определенная система установок, дающая возможность субъекту оценивать ситуации (в данном случае — ситуацию задачи) в целом и принимать определенное решение о цели и способе действия.

В работах многих советских психологов ориентация трактуется и как один из типов поисковой деятельности. Так, С. Л. Рубинштейн, А. Н. Леонтьев, П. Я. Гальперин, В. Н. Пушкин и другие считают, что для процесса решения любой нестандартной задачи характерны три основных типа поисковой деятельности: ориентация, исполнение и контроль (причем в ориентацию включается и планирование решения задачи). Внутренние механизмы поисковой деятельности решающего задачу трактуются в этом случае так.

На этапе ориентации осуществляется анализ условия задачи, изучение существенных связей данных и искомых, сравнение отдельных признаков, присущих данным, или цели с каким-либо стереотипом (в котором отражен прошлый опыт решающего задачу), известным ему аналогом данной задачи, знакомым теоретическим положением, связывающим данные и цель, выявление различных ассоциаций, возникающих при анализе условия задачи, перебор известных методов решения задач и т. п.

В заключительной стадии этого этапа процесса решения задачи возникает гипотеза о возможных путях поиска решения; возникает общий план решения задачи, детали которого получают проверку действием, корректируются результатами этой проверки, отвергаются или видоизменяются. В результате намеченный план решения вырисовывается более четко, обрастает новыми деталями, регулирует дальнейший ход поисковой деятельности. Если намеченная гипотеза в возможной структуре решения оказывается несостоятельной, то решающий возвращается к анализу условия задачи.

На этапе исполнения решающий начинает систематическую реализацию намеченного плана решения; проводит в соответствие с

---

[1] См.: Амосов Н. М. Моделирование мышления и психики. Киев, 1965, с. 229.

ним определенные преобразования условия задачи, вводит вспомогательные элементы (обозначения), упрощая их и сближая данные с целью, выявляет конкретные подзадачи, решение которых означает последовательную реализацию отдельных частей плана.

Если на этом этапе реализация намеченного плана удается, начинается новый этап решения задачи — этап контроля, на котором проводится сопоставление результата решения с условием, проверка деталей решения, его обоснование.

Заметим, что в реальном процессе решения эти этапы перерастают один в другой, пересекаются по своему содержанию. Так мы видели, что уже на этапе ориентации присутствуют элементы контроля; на этапе исполнения или контроля почти всегда присутствуют элементы ориентировки. Выделение (и соответствующее обозначение) названных этапов свидетельствует лишь о том, что те или иные мыслительные операции доминируют на том или ином этапе процесса решения задачи.

Понятно, что на различных этапах процесса решения задачи в большей или меньшей степени проявляются те или иные качества мышления, входящие в состав способностей. По мнению А. А. Фельдбаума[1], на этапе построения гипотез о возможных путях решения задачи наиболее ярко проявляются такие качества мышления, как изобретательность, оригинальность, склонность к фантазии, инициативность; на этапе выбора из возможных направлений решения того, который с наибольшей вероятностью ведет к цели, проявляются прежде всего такие качества мышления, как проницательность, интуиция, здравый смысл, опыт и память; на этапе планирования решения при постановке промежуточных целей, т. е. на этапе расчленения задачи на последовательность более простых подзадач, наиболее важными оказываются такие качества мышления, как последовательность, логичность, методичность. С его точки зрения, комбинация указанных качеств мышления является характерной для творческой деятельности человека любой профессии.

Пониманию внутренней структуры процесса решения задачи способствуют интересные результаты исследований зарубежных психологов Ф. С. Бартлетта и ван дер Гера[2]. Определяя мышление как высшую форму умелого поведения, Ф. С. Бартлетт говорит о том, что его природа аналогична природе моторных учений, каждое из которых есть система последовательных движений. Это подтверждается и исследованиями американского кибернетика Г. Паска, который вместе с Бартлеттом считает систему последовательных операций характерной и для вычислительной деятельности

---

[1] См.: Фельдбаум А. А. Процессы обучения людей и автоматов. — В кн.: Методы оптимизации автоматических систем. Под ред. Я. З. Цыпкина. М., 1972, с. 112—113.

[2] Основные направления исследований психологии мышления в капиталистических странах. Под ред. Е. Ф. Шороховой. М., 1966, с. 258—261.

при решении задач[1]. Эта мыслительная деятельность, по Бартлетту, регулируется целями поставленной задачи и эмпирически может быть выражена как «заполнение пробела» (нахождение недостающей связи или свойства) между объектами с характерной чертой — направлением (выбором стратегии и метода решения). В связи с этим Ф. С. Бартлетт выделяет три основных способа заполнения «пробелов» (т. е. три типа задач):

а) интерполяция;

б) экстраполяция;

в) выявление новых свойств.

Ван дер Гер, который стоит на позициях, очень близких к Бартлетту, представляет процесс решения задач как процесс «развертывания» данной задачной ситуации до «определенной формы, обозначенной требованием задачи»[2]. В отличие от Бартлетта ван дер Гер различает только два основных типа задач: а) интерполяционные и б) экстраполяционные.

По мнению ван дер Гера, интерполяционные задачи характеризуются ясно определенными исходными данными и четко определенной целью; их решение достигается при нахождении неизвестной связи между данными и искомым.

В зависимости от способа нахождения этих связей ван дер Гер различает три основных метода решения задач интерполяционного типа:

1) постепенное развертывание условия задачи;

2) постепенное развертывание цели;

3) совместное сближение условий и цели.

Мы видим, что здесь по существу речь идет о применении анализа и синтеза в процессе решения; в первых двух случаях превалирует один или другой, в последнем — они выступают совместно.

Экстраполяционными задачами (или проблемными ситуациями) ван дер Гер называет задачи, в которых определена либо цель, либо условие. Основной метод решения — мысленная экстраполяция. По-видимому, при решении этих задач преимущественно применяются обобщение и конкретизация; широко используются в процессе решения умозаключения по аналогии и интуиции.

Эти исследования представляются нам весьма интересными; в их свете нетрудно убедиться в том, что задачи традиционного школьного курса математически являются либо шаблонными, либо задачами только интерполяционного типа. Тем самым нарушается целостность в развитии математического мышления учащихся, не обеспечивается разносторонний характер этого развития.

---

[1] См.: П а с к Г. Электронные клавишные обучающие машины. — В кн.: Программированное обучение. Под ред. И. Д. Ладанова. М., 1966, с. 187.

[2] Основные направления исследований психологии мышления в капиталистических странах. Под ред. Е. Ф. Шороховой. М., 1966, с. 258.

Особого внимания заслуживают идеи Д. Пойа, реализуемые им в широкоизвестных книгах[1]. Ратуя за широкое распространение эвристических методов в обучении математике, и в частности за обучение решению задач и обучение через задачи, Д. Пойа приводит немало интересных положений и иллюстрирующих их примеров, относящихся к методам решения задач, к роли задач в развитии мышления и т. д.

Нет сомнения в том, что книги Пойа представляют значительный интерес для понимания современной постановки задач в обучении. Однако в конкретном анализе процесса решения задач Д. Пойа не проявляет должной отчетливости. Правда, он пытается вывести некоторые правила, следуя которым можно прийти к открытиям, но не анализирует той психической деятельности, в отношении которой предлагаются эти правила. Поэтому многие из его рекомендаций носят довольно неопределенный характер. Например, «первое правило — надо иметь способности, а наряду с ними и удачу. Второе правило — стойко держаться и не отступать, пока не появится счастливая идея»[2].

Интересна проводимая в той же книге схема процесса решения задачи, указывающая, в какой последовательности следует совершать действия, чтобы добиться успеха. Она включает в себя четыре этапа:

1) ясное понимание задачи;
2) составление плана решения;
3) осуществление плана решения;
4) изучение найденного решения.

Содержание этапов раскрывается в наводящих вопросах и указаниях, наподобие следующих: «Что известно? Что дано? Известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Рассмотрите неизвестное! Нельзя ли иначе сформулировать задачу? Еще иначе? Нельзя ли придумать другие данные, из которых можно было бы определить неизвестное? Приняты ли вами во внимание все существенные понятия, содержащиеся в задаче?»[3]

Конечно, эти рекомендации имеют определенную ценность. Однако, как признает и сам Д. Пойа, творческий акт нельзя до конца регламентировать. Даже при выполнении всех указаний нельзя обойтись без «блестящей идеи». Для того же, чтобы такие идеи возникали, нужно, по мнению Д. Пойа, чаще решать задачи. Умению решать задачи посвящена еще одна работа Д. Пойа — «Математика и правдоподобные рассуждения»[4]. Весьма убедительно в ней показано, как необходимо, чтобы учащиеся понимали, что математика не представляет собой совокупность жестких правил

---

[1] См.: Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М. 1975; Математические открытия. М., 1970; Как решать задачу. М., 1961.
[2] Пойа Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 141.
[3] Пойа Д. Как решать задачу. М., 1961, с. 202—203.
[4] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., 1975.

и раз и навсегда установленных теорем; понимали, что доказательство любой теоремы, решение любой задачи требуют фантазии, изобретательности, творчества. Д. Пойа правильно подчеркивает, что необходимо привить учащимся любовь к процессу решения задач, научить их экономно расходовать свои силы, обучить их некоторым рациональным приемам, сокращающим путь к решению задачи. «Для догадки должно быть место и в преподавании математики. Обучение должно подготавливать к изобретению или, по крайней мере, давать некоторые представления об изобретении. Во всяком случае, обучение не должно подавлять в учащемся ростки изобретательности»[1], — пишет Д. Пойа.

Для педагогов и психологов, тесно связанных с дидактикой, точка зрения Д. Пойа на основные этапы процесса решения задачи весьма характерна. Так, Н. А. Менчинская выделяет следующие этапы процесса решения текстовых арифметических задач: а) осознание задачи как проблемы, способы решения которой еще неизвестны; б) расчленение рассматриваемых математических задач на искомые и данные; в) выявление зависимости между искомыми и данными, часто сопровождаемое выдвижением гипотезы и ее частичной проверкой; г) осуществление решения; д) проверка решения задачи[2].

В ходе самых разнообразных исследований, как в психологии мышления, так и в кибернетике, обнаружилось, что процессы решения задачи человеком и машиной не только не совпадают по многим компонентам, но и имеют принципиальные различия по целому ряду важных свойств.

Так, например, в процессе решения задач человеком имеют место следующие основные компоненты:

1) динамическое воссоздание условия задачи (внутреннее моделирование нестационарности, отраженной в задаче (ситуации));

2) конструирование определенной логически последовательной схемы решения.

В кибернетических устройствах весьма успешно осуществляется второй из этих компонентов процесса решения и значительно менее успешно первый. В их деятельности он заменяется жесткой программой ввода данных, осуществляемой, как правило, человеком. Поэтому кибернетические устройства не могут осуществить рациональный поиск решения задачи столь успешно, как это делает человек.

Отметим, что известный советский психолог А. Н. Леонтьев также выделяет в процессе решения человеком нестандартной для него задачи два основных этапа — «Нахождение принципа решения

---

[1] Пойа Д. Там же, с. 352.

[2] См.: Менчинская Н. А. Задача. — Педагогическая энциклопедия. Т. 2. М., 1965, с. 64.

и его применение, считая наиболее выраженным предметом психологического исследования именно события первого этапа»[1].

В отличие от самых совершенных автоматов мышлению человека характерны также и такие свойства, как: а) умение сочетать упорядоченность в решении определенных задач с беспорядком, обусловленным как развитием процесса решения, так и воздействием окружающей среды; б) умение использовать одновременно как цифровые, так и аналоговые методы и приемы обработки информации; в) умение сочетать (и при этом весьма продуктивно) логические и эвристические принципы переработки информации; г) умение обеспечить надежность получаемых результатов, используя определенную условиями задачи избыточность имеющейся информации; д) высокую точность в решении задачи, вполне согласованную с конкретными требованиями к ее решению; е) принцип наименьшего взаимодействия, выраженный в достижении эффективных результатов за счет автономности (относительной независимости) применяемых в ходе решения задачи средств[2].

## ФУНКЦИИ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ ВОСПИТЫВАЮЩЕГО И РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Вопрос о функциях задач в публикациях по дидактике (отечественной и зарубежной) представлен весьма незначительно. В дидактических исследованиях он выступает в связи с той или иной типологией задач, используемых в процессе обучения.

Так, определяя познавательную задачу как «...проблему, решаемую при данных условиях или параметрах»[3], М. Н. Скаткин отмечает, что основной характеристикой такой задачи (ее основной функцией) является формирование у школьников способности вести самостоятельный поиск ее решения, самостоятельно осуществлять познавательную деятельность. «Если способ решения ученику заранее известен или дан в готовом виде, такая задача не является познавательной»[4].

И. Я. Лернер, определяя обучающе-познавательную задачу, указывает, что основной функцией такой задачи является передача учащимся соответствующей учебной информации. Такая задача,

---

[1] Пономарев А. Я. Развитие проблем научного творчества в современной психологии. — В кн.: Проблемы научного творчества в современной психологии. Под ред. М. Г. Ярошевского. М., 1971, с. 127.

[2] См.: Баженов Л. Б., Бирюков Б. В. Некоторые философские аспекты моделирования биологических объектов. — В кн.: Математическое моделирование жизненных процессов. Под ред. М. Ф. Веденова, В. С. Гурфинкеля, Н. Н. Лифшица и А. А. Ляпунова. М., 1968, с. 61—63.

[3] Скаткин М. Н. Решенные и нерешенные вопросы проблемного обучения. — «Учительская газета», 1973, 11 янв.

[4] Там же.

по его мнению, «обучает учащихся способу решения, который ученик потом применит при решении сходных задач»[1]. Заметим, что такая задача ставится и решается самим учителем; ученику отведена роль наблюдателя. Функцией «формировать у учащихся соответствующие умения и навыки» (по известному им образцу) обладают, по его мнению, тренировочные познавательные задачи[2].

Наконец, И. Я. Лернер выделяет задачи поисковые, основная функция которых — формировать способность учащихся на основе имеющихся знаний и опыта, получать новые знания или отыскивать новые средства поиска этих знаний[3].

Н. К. Рузин обращает особое внимание на задачи с развивающими функциями, относя к ним, однако (в младших классах), лишь задачи, формирующие у школьников способность осуществлять умственные операции, характерные для операционного мышления, в трактовке Ж. Пиаже (обратимость, соотношение порядка и эквивалентности и т. д.)[4].

Итак, в указанных работах проявляется характерное для дидактических работ выявление общих функций задач — познавательной и развивающей (с соответствующей общей характеристикой этих функций).

Рассмотрим, как освещается вопрос о функциях задач в работах по методике математики.

Функции задач в обучении математике определяются прежде всего общими и конкретными целями самого обучения, и в частности теми целями, которые ставятся при постановке тех или иных задач.

В свое время И. В. Арнольд справедливо отметил, что цели, реализуемые в ходе решения школьниками различных математических задач, никогда точно не формулировались, а их подбор, как правило, определялся уже сложившимися (и часто) устаревшими традициями[5].

И хотя с того времени прошло около 30 лет, положение существенно не изменилось. В объяснительных записках к программам функции задач обычно привязываются к изучению конкретных вопросов, т. е. формулируются в основном с позиций обучения. Лишь в последнее время, в связи с тем что на решение задач стало обращаться особое внимание и в дидактике, и в психологии, и в кибернетике, вопрос о функциях задач стал также и предметом внимания методики математики.

---

[1] Познавательные задачи в обучении гуманитарным наукам. Сб. статей под ред. И. Я. Лернера. М., 1972, с. 21.

[2] Там же.

[3] Там же.

[4] См.: Рузин Н. К. О функциях математических задач и развитии мышления учащихся начальных классов. — В сб.: В помощь учителю математики. Под ред. В. К. Смысляева. Йошкар-Ола, 1972, с. 7.

[5] См.: Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. — «Известия АПН РСФСР», вып. 6. М. — Л., 1946, с. 7.

В работе Н. К. Рузина[2] выделены в качестве основных: познавательные, развивающие и прикладные функции, а также функции обучения решению задач, через каждую из которых проявляется, по его мнению, воспитывающий характер обучения. Характеризуя познавательные и развивающие функции задач, автор отмечает: «Задачи выполняют познавательные функции в обучении математике, если в процессе их решения учащиеся приобретают математические сведения или овладевают математическими методами»[3]. И далее: «Задачи могут выполнять развивающие функции в обучении математике, если они дают возможность выработки и применения некоторых приемов логического и творческого мышления»[4].

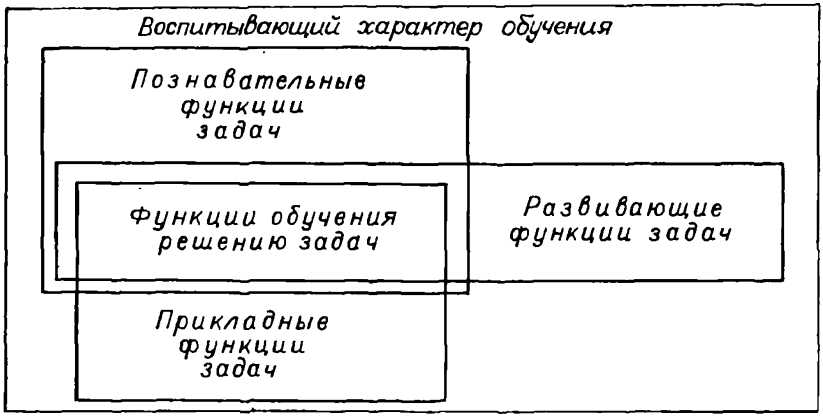



Рис. 8

Хотя та и другая характеристики в целом представляются правильными, отметим все же, что функции закрепления усвоенных ранее знаний, контроля и оценки знаний и некоторые другие не находят себе место в числе познавательных функций задач, трактуемых по Н. К. Рузину. Обучающие функции задач им включены в познавательные, что, на наш взгляд, не вносит должной ясности и четкости в иерархию функций задач.

Важно отметить, что Н. К. Рузин выделяет воспитывающие функции задач (что, безусловно, очень ценно). Однако он придает им, по нашему мнению, слишком объемное значение (слишком широко их трактует), что следует, в частности, из следующей, приведенной им иерархической схемы[1] (рис. 8). Анализируя эту схему,

---

[1] См.: Рузин Н. К. Познавательные и развивающие функции задач в обучении математике учащихся начальных классов средней школы. М., 1971.

[2] Там же, с. 32.

[3] Там же, с. 35.

можно усмотреть выделение особых функций — функций обучения решению задач (это представляется весьма интересным). Н. К. Рузин отмечает, что эти задачи «по содержанию, по методам решения могут сопутствовать и познавательным, и развивающим, и прикладным функциям, но они при этом выполняют и свои специфические функции, заключающиеся в выработке специальных умений решать задачи»[2]. Однако место их в иерархической схеме Н. К. Рузина представляется спорным. Если трактовать обучение решению задач как обучение определенным приемам эвристической деятельности, то можно отождествить функции обучения решению задач с их развивающими функциями.

Вызывает также сомнение целесообразность выделения прикладных функций задач (особенно — в начальном обучении математике), так как приложение теории к практике, имеющее место в школьном обучении, имеет целью не столько обучить школьников математическим методам решения практических задач, сколько дать им представление о тесной связи математики с простейшими явлениями реальной действительности, т. е. несет в себе прежде всего воспитывающие функции. Кроме того, задачи, называемые в школьном обучении практическими, являются таковыми скорее по фабуле, чем по существу. Задачи, используемые в школьном курсе математики, могут реализовывать простейшие прикладные функции разве что при изучении приложений дифференциального, интегрального и векторного исчислений.

Н. К. Рузин правильно отмечает[3], что выделение функций задач может в практике обучения выглядеть весьма условным, так как реализация той или иной функции в качестве ведущей во многом зависит от того, на каком аспекте той или иной задачи сделает акцент учитель при ее рассмотрении со школьниками.

В исследовании В. Ю. Гуревича речь идет не о функциях задач вообще, а о функциях, присущих поиску их решения и обучению приемам такого поиска. При этом основное внимание В. Ю. Гуревич уделяет обучению школьников обобщению и конкретизации на специально подобранных задачных ситуациях. Рассматривая различные серии таких задач, автор попутно выявляет и их функции (общие и специфические). К числу общих функций, реализуемых в ходе их решения, В. Ю. Гуревич относит следующие[4]:

1) формирование приемов поиска решения задачи;

2) иллюстрация, дополнение и углубление изученного теоретического материала;

---

[1] Рузин Н. К. Познавательные и развивающие функции задач в обучении математике учащихся начальных классов средней школы. М., 1971, с. 31.

[2] Там же, с. 39.

[3] Там же, с. 41.

[4] См.: Гуревич В. Ю. Формирование приемов поиска решения задач на уроках математики в 6-м классе. М., 1972.

3) формирование умения формулировать математические предложения, развитие речи;

4) возбуждение и развитие интереса школьников к самостоятельному творчеству;

5) связь обучения математике с жизнью.

К числу же специфических функций относятся[1]:

1) развитие наблюдательности;

2) формирование способности выделять главное, существенное;

3) преодоление формализма в знаниях, формирование гибкости мышления;

4) формирование умения применять известные знания в новой ситуации;

5) формирование способности к обобщению различных частных умений и навыков;

6) развитие обобщенной памяти и т. п.

Ясно, что перечень как общих, так и специальных функций задач, приведенный В. Ю. Гуревичем, страдает неполнотой (даже применительно к тем задачам, какие им рассмотрены). Кроме того, в данном им перечне функций этих задач трудно обнаружить какой-либо порядок (акцент их все время смещается между обучением, воспитанием или развитием). Можно предположить, что автор не ставил своей целью выявить все основные функции, реализуемые в предлагаемых им сериях задач, а старался показать, что обучение поиску решения задач оказывается разносторонне полезным. С этим можно согласиться, но следует отметить, что арсенал функций, реализуемых в ходе обучения школьников поиску решения задач, значительно богаче, чем тот, который приводится в данной работе. Как само обучение поиску решения задач, так и ведущие функции задач, способствующие обучению приемам этого поиска, естественно, должны быть прежде всего развивающими функциями.

Для многих зарубежных исследований характерен весьма общий подход к определению функций задач в обучении математике, в соответствии с которым выделяются не столько те или иные функции задач, сколько общие цели постановки задач в школьном обучении. В числе таких целей прежде всего упоминается формирование у школьников интереса к изучению математики, мотивация изучения математики, усвоение теоретического материала, формирование творческих способностей, обучение общим приемам решения задач и, наконец, формирование мировоззрения (выяснение роли математики в процессе познания человеком реальной действительности и в процессе преобразования природы на службу человеку).

Несмотря на общность формулировки названных целей, реализуемых через решение задач (т. е. функций задач), нетрудно

[1] Там же, с. 32, 37, 41, 47, 50, 51.

обнаружить, что в них выражены важнейшие цели математического образования (воспитания, обучения и развития).

Важно также отметить, что и для зарубежной школы характерен отказ от узкого понимания роли задач как средства, с помощью которого реализуются только различные обучающие функции. В интересной работе, описывающей результаты экспериментального обучения через задачи в одном из технических учебных заведений США[1], эта тенденция проявляется весьма ярко. Основываясь на результатах проведенного эксперимента, авторы подчеркивают, что задачи с традиционными обучающими функциями, решение которых представляет по существу лишь закрепление определенного теоретического материала и тесно связанные с последним, не могут быть положенными в основу «методики самообучения посредством решения задач». По их мнению, задачи, которые могут отвечать цели самообучения, должны обладать следующими особенностями[2]:

1) быть актуальными, с точки зрения учащихся; возбуждать у них интерес и желание отыскать решение;

2) требовать для своего решения от учащихся воображения и творческих способностей;

3) быть одновременно достаточно сложными и доступными для учащихся;

4) побуждать учащихся к поиску новых принципов, фактов и методов решения (результатом которого является приобретение новых знаний);

5) допускать различные способы решения и вариативность результатов решения (или даже отсутствие такового);

6) содержать в отдельных случаях данные и факты, излишние для осуществления решения (или иметь их в недостаточном для решения числе);

7) допускать быстрое решение и решение в течение долгого времени работы;

8) требовать умений применять анализ и синтез в качестве методов их решения.

Этот перечень особенностей задач, интересный с точки зрения отбора задач для обучения, характерен и тем, что в нем по существу отражены многие важнейшие функции задач, направленные на воспитание и развитие учащихся и дополняющие их специфически обучающие функции, связанные с конкретным содержанием задачи. Так, функции, отмеченные в п. 1, 3, 7 перечня, акцентируют внимание преподавателя на воспитание тех или иных личностных качеств учащихся, а функции, указанные в п. 2,4—6,8, — на развитие их мышления.

---

[1] См.: Харис Л. Д., Уайт А. Р. Многолетний опыт обучения по программе с ориентацией на решение проблем. — В кн.: Кибернетика и педагогика. Новые тенденции к обучению инженерных кадров в США. Под ред. Д. Уиннера. М., 1972, с. 109—114.

[2] Там же, с. 110.

Пожалуй, одной из первых публикаций, поставивших вопрос о функциях задач в обучении на широкое обсуждение методистов и учителей математики, является статья К. И. Нешкова и А. Д. Семушина[1], в которой авторы попытались преломить точку зрения дидактики по этому вопросу непосредственно в конкретную методику обучения математике. Авторы данной статьи в целом верно отмечают, что «важное значение в достижении этих целей (целей обучения математике. — *Ю. К.*) имеет обучение решению задач, однако для достижения каждой из целей нужны свои задачи, своя система задач соответственно и своя методика обучения их решению». И далее: «Задачи в обучении должны выполнять свои функции (дидактические, познавательные и развивающие)»[2].

Авторы предлагают различать задачи с основными функциями по следующим признакам:

а) задачи с дидактическими функциями — задачи «на прямое применение изученной теории или рассматриваемой зависимости, на закрепление всех основных фактов школьного курса математики»[3];

б) задачи с познавательными функциями — задачи, в процессе решения которых «... учащиеся углубляют отдельные обязательные для усвоения всеми учащимися стороны материала, изученного в классе, знакомятся с важными в познавательном отношении теоретическими сведениями, не изучавшимися ранее методами решения задач»[4];

в) задачи с развивающими функциями — «это задачи, содержание которых может отходить от основного курса математики, посильно осложнять некоторые из изученных ранее вопросов школьной программы; запоминание и усвоение этого материала всеми учащимися не обязательно.

При решении этих задач ученику недостаточно применять изученные теоретические сведения или уже известные методы решения задач, а необходимо проявить выдумку и сообразительность»[5].

В основу предлагаемой типологии задач по основным функциям по существу положен следующий принцип: задачи, которые реализуют все требования к усвоению программного материала, — задачи с дидактическими функциями; задачи, направленные на углубленное его изучение,— задачи с познавательными функциями; задачи, направленные на расширение программного материала (и требований к уровню его усвоения), — задачи с развивающими функциями. Правда, авторы об этом нигде явно не говорят. Однако усмотреть этот факт совсем нетрудно, если внимательно прочитать данные ими характеристики этих трех видов задач. Однако можно согласиться не со

---

[1] См.: Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении. — «Математика в школе», 1971, № 3, с. 4—7.

[2] Там же, с. 4.

[3] Там же, с. 5.

[4] Там же.

[5] Там же.

всеми положениями этой, в целом весьма интересной работы. Так, авторами отмечается, что «в настоящее время не разделяются познавательные и развивающие функции задач»[1].

Свое стремление разделить их авторы, прежде всего, обосновывают не ссылкой на различия по существу, а тем, что задачи с познавательными функциями считаются якобы обязательными для решения всеми учащимися, а с развивающими функциями — таковыми не считаются. Смешение, по мнению авторов, приводит к тому, что умение решать те и другие задачи становится обязательным для всех, что не только не целесообразно, но и нередко попросту невозможно.

Авторы прямо говорят о том, что «задачи, несущие познавательные функции, представляют собой объект изучения, поэтому они должны быть прочно усвоены всеми учащимися. Умение решать такие задачи должно быть доведено до прочного навыка»[2]. «Задачи с развивающими функциями не должны быть объектом изучения». «Это не означает, что они превращаются в задачи, необязательные для решения. Решение последних не доводится до навыка. Учащиеся — каждый по мере своих возможностей — должны просто решать эти задачи[2]. И чуть ранее: «Задачи, несущие развивающие функции, в основном предназначены для развития мышления учащихся»[3].

Понимая буквально эту характеристику основного назначения задач с развивающими функциями, можно прийти к неверному выводу о том, что только лишь такие задачи способствуют математическому развитию школьников, равно как и о том, что развитие математического мышления учащихся должно осуществляться «по мере своих возможностей» у каждого. Трудно также понять и рекомендацию авторов о том, что решение всех задач с познавательными функциями «должно быть доведено до прочного навыка» (а как же быть с решением задач, несущих дидактические функции?). Нечеткость позиции авторов по вопросу о функциях задач в обучении объясняется, на наш взгляд, неправильно выбранным основанием для такой типологии. Как известно решение задач — одна из ведущих форм математической деятельности. Поэтому представляется правильным говорить о тех или иных функциях задач в зависимости от того, какой вид деятельности школьников проявляется в процессе их решения или в зависимости от того, какая конкретная цель обучения, воспитания или развития реализуется при постановке той или иной задачи в конкретных условиях обучения.

Прежде чем говорить о функциях задач в обучении, представляется целесообразным сформулировать несколько исходных общих положений:

---

[1] Нешков К. И., Семушин А. Д. Функции задач в обучении. — «Математика в школе», 1971, № 3, с. 5.

[2] Там же, с. 6

[3] Там же, с. 6.

1) Практика обучения математике показывает, что любая конкретная задача, которая ставится и решается на том или ином этапе обучения, несет в себе самые разнообразные функции, которые в данных конкретных условиях (определяемых либо учебником, либо учителем, либо конкретными условиями обучения) проступают явно или скрыто. Поэтому не имеет смысла говорить о задаче, несущей какие-либо конкретные функции. Имеет смысл говорить о той или иной функции, которую представляет данная задача в качестве ведущей функции, реализуемой в данный конкретный момент.

2) Ведущее положение одной или нескольких функций задачи имеет динамичный характер. В зависимости от конкретных условий обучения та или иная скрытая функция задачи может выступить явно, а ее ранее ведущая функция остаться нереализованной. На практике нередко учитель не видит ведущей (по мнению авторов учебников) функции той или иной задачи, и поэтому ее постановка не достигает желаемой цели; и обратно, нередки случаи, когда творчески работающий учитель видит «гораздо дальше» авторов учебника, вскрывая и реализуя в ходе решения той или иной задачи более широкие или более полезные функции, чем те, которые ей официально приписываются.

3) Являясь одним из важнейших средств обучения математике (в широком его понимании), система школьных математических задач должна отвечать главным целям школьного математического образования. Каждая же отдельная задача или серия задач должна быть направлена на реализацию той или иной (или тех, или иных) конкретной цели обучения (понимаемого опять-таки в широком смысле).

4) Так как основными компонентами школьного математического образования являются обучение (понимаемое теперь как формирование у учащихся определенной системы математических знаний, умений и навыков), воспитание (мировоззренческое, нравственное и т. д.) и развитие математического мышления (способность к выполнению основных умственных операций, владение общими приемами и методами научного познания и т. д.), представляется целесообразным в качестве ведущих функций задач считать функции обучающие, воспитывающие и развивающие.

5) Так как каждая из вышеназванных основных функций задач практически никогда не выступает изолированно от других (например, всякое обучение развивает, если оно поставлено правильно), то о той или иной функции каждой конкретной задачи или системы задач имеет смысл говорить как о функции ведущей (центральной, реализуемой в первую очередь). Понятно, что реализация в практике обучения той или иной функции каждой задачи должна быть достаточно четкой. Ведущая функция задачи определена основной целью ее постановки перед учащимися и должна быть реализована в первую очередь. Несвоевременное акцентирование внимания учащихся на второстепенной функции той или

ной задачи может отрицательно сказаться на эффективности использования этой задачи на уроке[1].

Представляется естественным и существование таких задач, которые несут в себе, в качестве ведущих, не одну из названных трех основных функций, а сразу две (а может быть, и все три одновременно). Так, например, принимая во внимание принятую в дидактике характеристику познавательной функции задач, нетрудно усмотреть, что здесь мы имеем дело с задачами, в которых в качестве ведущих функций выступают одновременно обучающая и развивающая функции.

Перейдем теперь к характеристике функций задач, разделенных нами на три основные категории: *обучающих*, *воспитывающих* и *развивающих*.

6) Так как функции задач определяются целями математического образования, то при их систематизации естественно исходить из этих целей.

Цели школьного обучения математике (понимаемого сейчас в узком смысле) определяются прежде всего содержанием курса математики и тем уровнем усвоения этого содержания, который предусматривается действующей программой и реализован в учебниках. Поэтому при выявлении этих функций задач программа, учебник и требования к усвоению программного материала должны быть, на наш взгляд, исходными. При определении воспитывающих функций задач в качестве содержательной основы представляется необходимым принять цели коммунистического воспитания, сформулированные в партийных документах и материалах XXV съезда КПСС и отраженные в дидактической теории воспитания. При определении развивающих функций задач следует, на наш взгляд, исходить из результатов исследований психологии мышления и кибернетики, с учетом их (уже имеющей место или желательной) реализации в процессе школьного обучения математике.

Переходим теперь к непосредственному рассмотрению функций задач в школьном обучении, и в частности обучении математике.

Под *обучающими* функциями задач будем понимать такие функции, которые направлены на формирование системы математических знаний, умений, навыков у школьников (как предусмотренных программой, так и расширяющих и углубляющих ее содержание) на различных этапах ее усвоения. Обучающие функции задач можно подразделить на функции общего характера, специального и конкретного характера. Под общими обучающими функциями понимаются такие функции задач, которые имеют место не только в ходе обучения математике, но и всем предметам естественно-математического цикла. Под специальными функциями математических задач

[1] См., например, статью Н. К. Рузина «Хватает ли задач?». — «Учительская газета», 1972 г., 14 сентября.

понимаются функции общего характера, соотнесенные только к обучению математике. Под конкретными функциями задач будем понимать частные виды специальных функций. Ограничимся одним примером. Формирование у учащихся некоторого понятия (на уровне представлений о нем) — общеобучающая функция; формирование представления о натуральном числе — специальная обучающая функция; формирование представления о числе нуль — конкретная обучающая функция.

К числу общих обучающих функций задач относятся:

1) Формирование у учащихся некоторого понятия (на уровне представлений о нем, на уровне его усвоения и на уровне закрепления).

2) Установление различных связей между понятиями (от рода к виду, внутрипредметные и межпредметные связи и т. д.).

3) Формирование описания, определения понятия; подведение объекта под понятие.

4) Формирование ведущих идей, законов, суждений.

5) Установление различных связей между ведущими идеями, законами, суждениями; структурных соотношений между ними, их иерархии.

6) Формирование основных видов умозаключений, способов и приемов их проведения.

7) Формирование ведущих умений и навыков, характерных для данного учебного предмета.

8) Формирование умений и навыков выражения мысли в речи и записи.

9) Формирование умений и навыков моделирования учебного материала (чертежи, графики и т. п.).

10) Формирование умений и навыков в обращении с приборами, инструментами, таблицами, с учебной и справочной литературой.

В процессе обучения математике, наряду с образовательными целями, должны реализовываться и определенные воспитательные цели.

Известно, что обучение воспитывает прежде всего своим содержанием — фактами и их истолкованием. Однако наряду с этим успех воспитания во многом зависит от того, как ставятся перед учащимися очередные учебные цели и организуется учебная работа коллектива учащихся и каждого из них в отдельности. Главное состоит в том, чтобы планомерно использовать изучаемый материал, сам процесс учения, и в частности процесс решения задач для воспитания у учащихся коммунистических взглядов и убеждений. Эта общая цель воспитания реализуется на уроках математики различными путями.

Немаловажным могут оказаться и элементы воспитания, осуществляемые в процессе решения школьниками математических задач. Ясно, что наиболее актуальными являются для нас такие воспитательные цели, как:

а) возбуждение и поддержание интереса к предмету;

б) воспитание у учащихся ответственного отношения к учению;

в) воспитание потребности и умений учиться математике, добывать знания о действительности посредством живого созерцания и абстрактного мышления (умений наблюдать и мыслить).

Изучаемые на уроке или отраженные в условии задач конкретные факты в конечном счете важны не сами по себе. Многие из них могут быть со временем забыты. Однако изучение всех таких фактов должно оставлять определенный след в сознании обучаемого. Знание того, как вообще человек добывает факты или осуществляет решения возникающих перед ним задач, как фиксирует человек в мышлении результаты познания реальной действительности, какие качества ума и личности присущи советскому человеку — строителю коммунизма, — все это должно формироваться постепенно и планомерно.

Конкретное математическое понятие, например, можно считать усвоенным на должном уровне, если ученик: верно, пусть своими словами, формулирует его определение, безошибочно выделяет в нем определяемое и определяющие понятия, не испытывает затруднений в распознавании понятия по его определению. Применительно к изучаемой на уроке теореме (или аксиоме) знание высокого уровня характеризуется, как известно, такими признаками: ученик верно формулирует теорему, умеет выделить в ней объекты и отношения между ними, безошибочно выделяет в теореме условие и заключение (основание и следствие), умеет сформулировать теорему на языке необходимости и достаточности и, наконец, умеет применить теорему в подходящем случае — распространить заключение теоремы на объект, относительно которого выполняется ее условие. Наконец, изучение конкретного доказательства отвечает нашим целям, если в результате ученик: понимает его необходимость, умеет воспроизвести доказательство самостоятельно, указать его аргументы (посылки), сознает правило, согласно которому из таких-то посылок следует такое-то заключение, умеет самостоятельно доказать аналогичную теорему. Понимание учеником того, что он в каждом конкретном случае должен знать и уметь, дисциплинирует его, заставляет быть внимательным, проявлять упорство в достижении цели. Понятно, что всему этому следует школьников обучить. Возможность осуществить такое «обучение» реализуется при постановке соответствующих задач.

Итак, под *воспитывающими* функциями задач будем понимать функции, которые направлены на воспитание коммунистических взглядов и убеждений, диалектико-материалистического мировоззрения, а также нравственных качеств, присущих советскому человеку.

В отличие от обучающих функций задач их воспитывающие функции, на наш взгляд, можно подразделить лишь на функции общего и специального характера. К числу общих воспитывающих функций задач относятся:

1) Формирование у школьников коммунистического мировоззрения (высокой степени сознательности, чувства ответственности перед обществом, социальной активности, чувства коллективизма и товарищества, оптимизма, гуманистической направленности, уважения к старшим).

2) Воспитание у школьников коммунистического отношения к труду (коллективизм, товарищеская взаимопомощь, творческая инициатива, дисциплинированность, организованность, принципиальность, бережливость и т. д.).

3) Воспитание у учащихся советского патриотизма и социалистического интернационализма (любовь к Родине, чувство гордости за свое государство, взаимоуважение, взаимопомощь и дружба народов, бережное отношение к прогрессивным национальным традициям, равенство и равноправие всех наций и народностей и т. д.).

4) Воспитание учащихся в духе коммунистической морали (высокие нравственные качества, личная ответственность, самодисциплина, целеустремленность в борьбе за новое и прогрессивное, умение соизмерять дела и поступки с интересами коммунистического строительства и т. д.).

5) Эстетическое воспитание учащихся (формирование чувства прекрасного, вкуса к прекрасному, потребности, желания и способности преобразовать окружающий мир и строить человеческие отношения по законам красоты, стремление пополнить свой запас художественных и эстетических знаний и т. д.).

6) Воспитание положительного отношения школьника к учебной деятельности, развитие интереса к учебе, любознательности.

7) Формирование умений рационализировать свою учебную работу и приемы ее оформления; воспитание способности доводить любое учебное задание до конца; формирование критичности в оценке результатов своей работы, наряду с чувством уверенности в правильности ее выполнения.

Нетрудно усмотреть, что в перечисленных общих воспитывающих функциях задач отражены главные воспитательные цели школьного обучения вообще. И это не случайно. Для советского образования характерен его воспитывающий характер. Поэтому общие и специальные воспитывающие функции задач реализуются одновременно. Конкретность той или иной воспитывающей функции не проявляется. Специализация этих функций проявляется в математическом содержании как самих задач, так и методов их решения, в особенностях, присущих постановке или процессу решения математических задач. Так, например, постановка задачи с фабулой, основанной на результатах выполнения пятилетнего плана развития народного хозяйства, способствует воспитанию у школьников советского патриотизма, формированию у них диалектико-материалистического мировоззрения и т. д., наряду с обучением и развитием, обусловленным математическим содержанием задачи и способами ее решения.

По существу каждая из задач (или процесс ее решения) несет в себе ту или иную воспитательную функцию. И от учителя (впрочем, как и автора учебника или задачника) зависит эффективность ее реализации. И хотя трудно себе представить существование математических задач с ведущей воспитывающей функцией, реализация целей воспитания через задачи может и должна быть систематической и планомерной. Поэтому конкретизация воспитывающих функций математических задач не имеет, на наш взгляд, никакого смысла.

Наконец, под *развивающими* функциями задач будем понимать такие их функции, которые направлены на развитие мышления учащихся, на формирование качеств, присущих научному мышлению, на овладение приемами эффективной умственной деятельности.

К числу общих развивающих функций задач относятся:

1) Владение известными методами научного познания как методами изучения (умение эффективно использовать при изучении наблюдение, сравнение, опыт, анализ и синтез, обобщение и специализацию, абстрагирование и конкретизацию).

2) Способность к умозаключениям индуктивного и дедуктивного характера (в частности, умение правильно пользоваться аналогией и интуицией).

3) Владение элементарной логической грамотностью.

4) Умение правильно ставить мысленный и практический эксперимент, высказывать гипотезы и проверять их.

5) Умение осуществлять простейшие моделирования учебных ситуаций и использовать имеющиеся (или сконструированные) модели для изучения свойств объектов (построение и использование графиков, диаграмм, рисунков, схем и т. д.).

6) Умение классифицировать изучаемые объекты, систематизировать имеющиеся знания, устанавливать причинно-следственные и структурные связи между ними.

7) Умение осуществить выбор средств и методов для достижения поставленной цели, учитывая конкретные условия; умение выделить главное.

8) Умение усматривать связь изучаемого материала с окружающей жизнью, с практической деятельностью людей, оценивать практическую значимость изучаемого материала.

9) Владеть основными качествами, присущими научному мышлению (гибкость, оригинальность, широта, глубина, критичность, ясность и четкость речи и записи и т. д.).

10) Обладать избирательной и прочной памятью и умением воспроизводить в памяти важнейшие положения из изученного материала.

К специальным развивающим функциям математических задач могут быть отнесены, например, следующие:

1) Умение математизировать простейшие ситуации жизненного характера, усматривать математические закономерности в окружающем мире.

2) Умение предсказать (предположить существование того или иного факта или свойства, относящегося к математическим объектам с достаточной степенью правдоподобия).

3) Умение доказать или опровергнуть то или иное математическое положение дедуктивным путем.

4) Умение планировать поиск решения задачи, исключить из ее условия ненужные данные, дополнять недостающие, отбирать методы, средства и операции, необходимые для ее решения, умение осуществить проверку правильности решения.

5) Иметь четкое представление о логической структуре курса математики, о том, что абстрактный характер математики является основной причиной ее многочисленных приложений в других науках, в технике, в народном хозяйстве.

6) Умение формулировать определения математических понятий и умение соотнести то или иное понятие с данным определением.

7) Умение быстро и правильно проводить вычисления с привлечением простейших вычислительных средств для облегчения вычисления на соответствующем его этапе; умение создать на основе теоретических знаний удобную вычислительную ситуацию, осуществлять проверку и прикидку правильности вычислений.

8) Умение распознавать то или иное математическое понятие в различных ситуациях.

9) Умение проводить исследование в простейших учебных ситуациях.

10) Умение эффективно пользоваться языком математической символики при записи математических положений и решении задач; умение читать и понимать предложения, записанные символически.

В качестве примера общих специальных и конкретных развивающих функций задач рассмотрим следующую функцию. Развитие способности учащихся к обобщению изученного — общая развивающая функция; развитие способности обобщить то или иное геометрическое понятие — специальная развивающая функция; формирование способности усмотреть обобщение понятий симметрии, вращения и параллельного переноса в понятии перемещения — конкретная развивающая функция задач.

Выше отмечалось, что завершающаяся в настоящее время реформа содержания и методов обучения математике предполагает усиление внимания к развитию мышления учащихся. Новые учебники по математике представляют для этого большие возможности, учение по ним становится более интересным. Эти возможности следует максимально использовать в первую очередь. Понятно, что усиление значимости постановки задач в обучении математике предполагает также соответствующее усовершенствование учебников и методики обучения в плане всестороннего использования функций решаемых в школе математических задач как в ходе обучения их решению, так и в ходе обучения математике через задачи.

К числу трех указанных функций, реализуемых математическими задачами, следует причислить еще один важный вид функции задач — *контролирующие* функции. Если говорить об общих контролирующих функциях задач, то можно говорить об установлении качества обучения, воспитания и развития школьников, т. е. о качестве их математического образования и воспитания в целом. Однако в таких общих целях математические задачи, как правило, не используются и потому, говоря о контролирующих функциях задач, следует прежде всего иметь в виду их специальные и конкретные функции. Специальные контролирующие функции задач (некоторые из которых имеют весьма общий характер) могут быть сформулированы на основе им соответствующих специальных обучающих, развивающих и воспитывающих функций. К их числу можно, например, отнести такие функции, как:

а) установление уровня обученности и обучаемости;

б) проверку способности (и умения) самостоятельно учиться;

в) оценку способности к сообразительности;

г) установление уровня развития того или иного компонента математического мышления или качества, присущего математическому стилю мышления;

д) установление уровня сформированности познавательных интересов и т. п.

Конкретные контролирующие функции задач, как правило, имеют целью оценку эффективности реализации той или иной конкретной цели обучения, воспитания и развития и потому формулируются по аналогии с соответствующими конкретными функциями задач, в которых эти цели отражены.

Следует отметить, что в практике школьного обучения математике (за исключением разве что этапа проведения экзаменов) контролю знаний и развития учащихся (и в том случае, когда он осуществляется через задачи) присущ обучающий и воспитывающий характер. Поэтому при постановке задач, в различного рода контрольных и проверочных работах следует учитывать этот побочный, но весьма важный эффект и соответствующим образом его использовать. И если для практики школьного обучения математике справедливо требование «обучая, развивать и воспитывать», то не менее справедливо и положение: «контролируя, обучать, воспитывать и развивать».

И Б № 1873

*Юрий Михайлович Колягин*

**ЗАДАЧИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ**

*ЧАСТЬ I*

Редактор *Т. П. Руженская*
Художественный редактор *К. К. Федоров*
Технический редактор *А. Г. Виноградова*
Корректор *О. С. Захарова*

Сдано в набор 12/VIII 1976 г. Подписано к печати 5/III 1977 г. 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 3. Печ. л. 7. Уч.-изд. л. 7,52. Тираж 2000 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 163.

Цена 20 к.